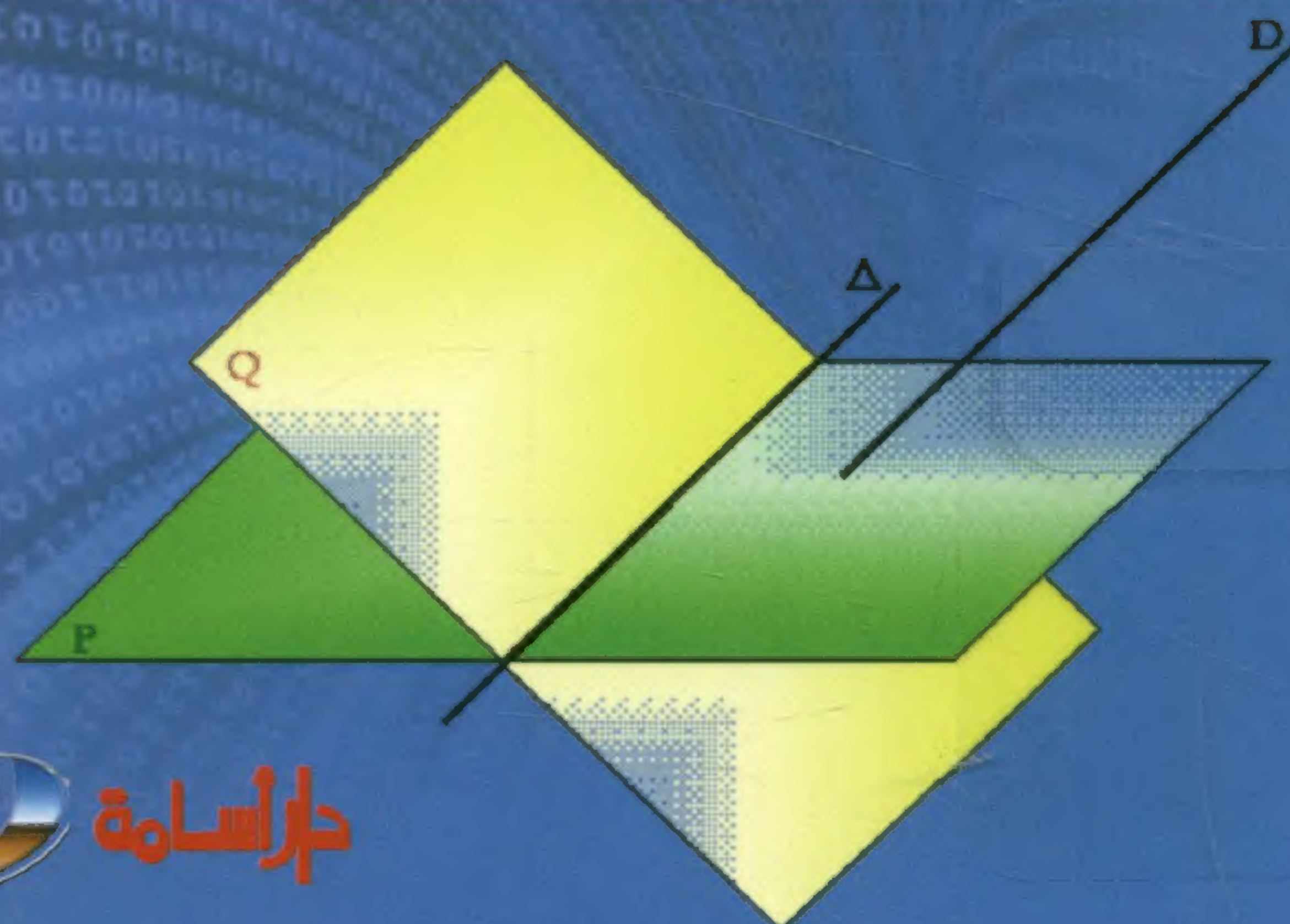
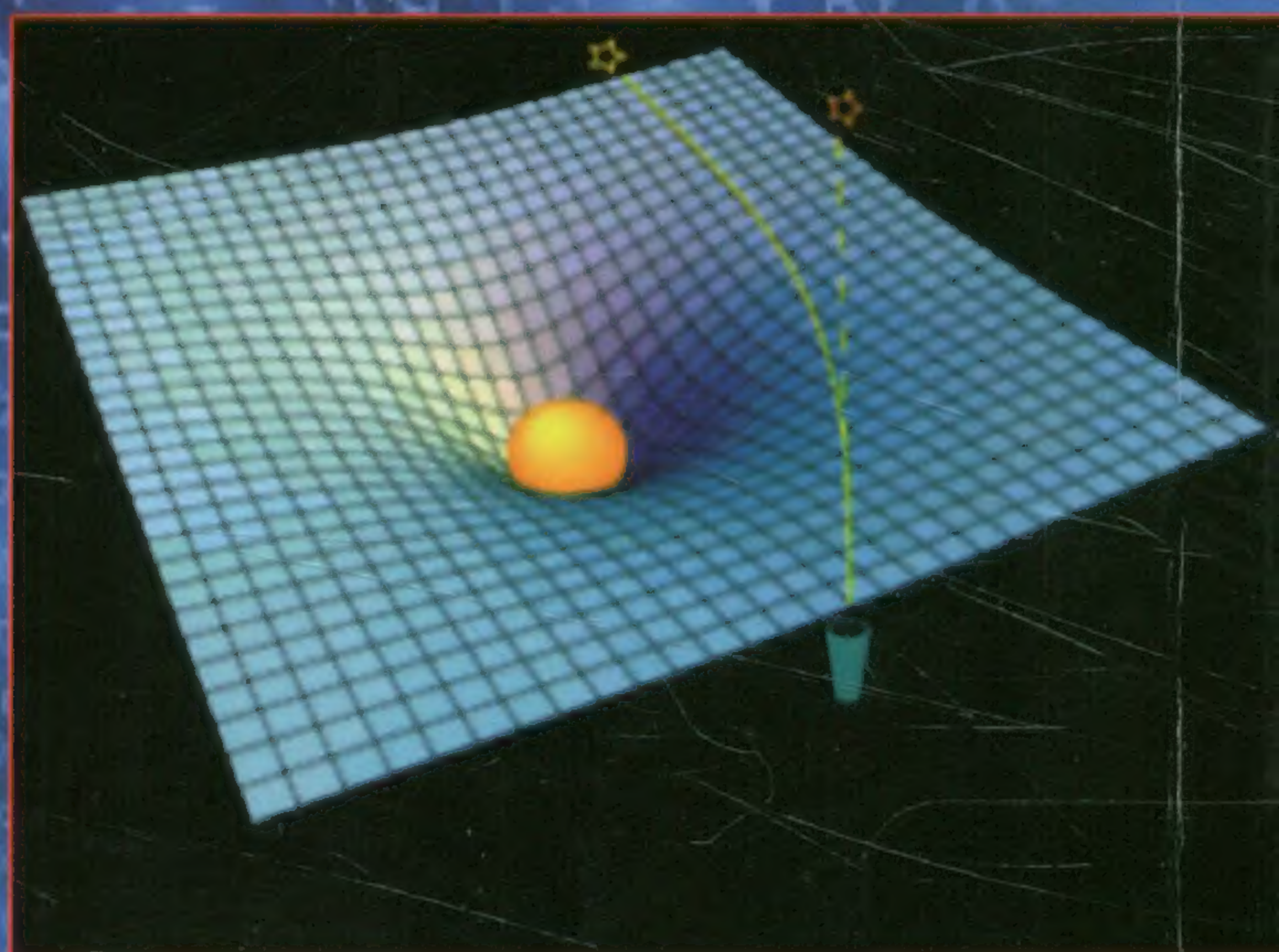
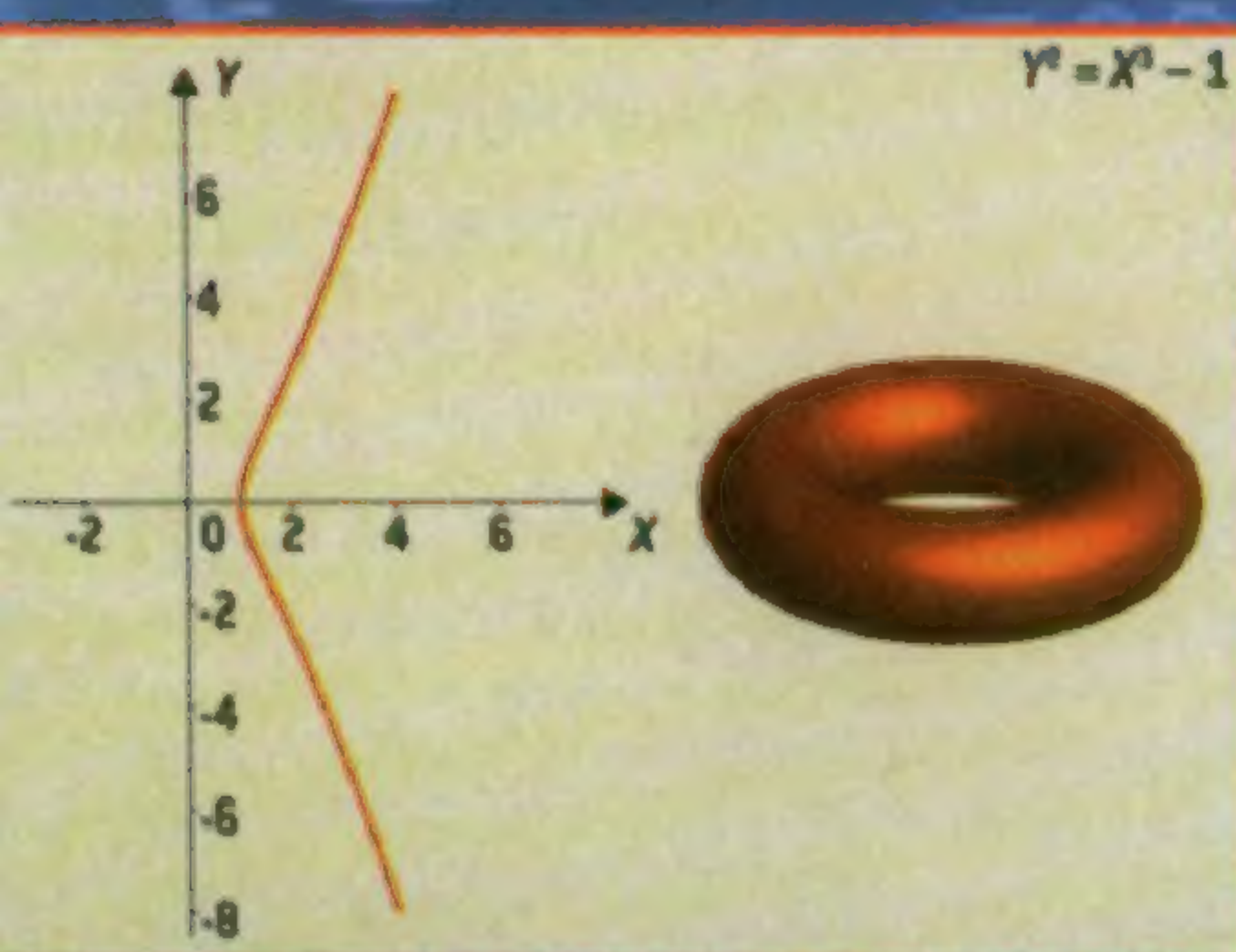
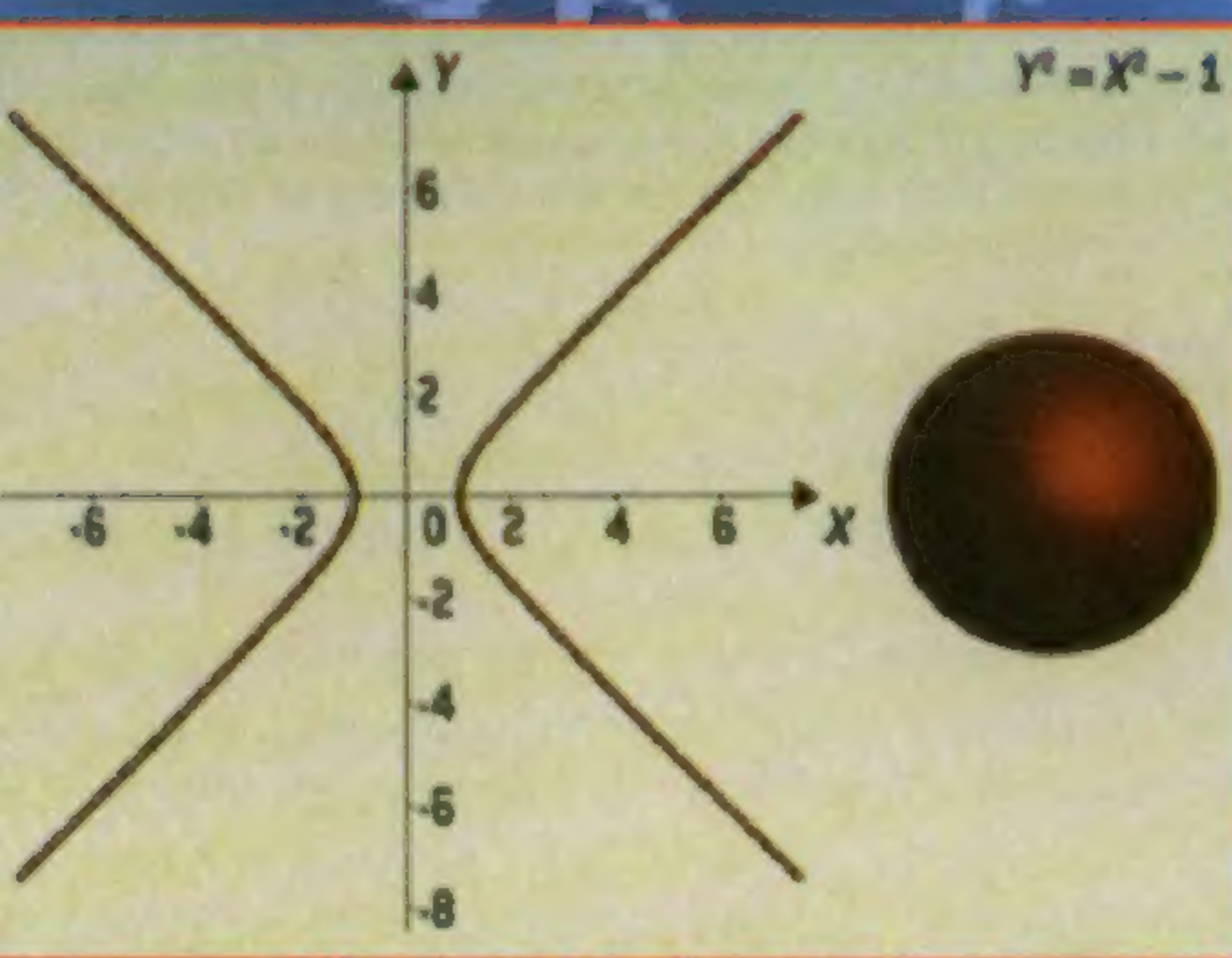


الرياضيات الشاملة

الهندسة الفضائية - المتتاليات والمتسلسلات
المنحنيات

صالح رشيد بطارسة



الرياضيات الشاملة

★ الهندسة الفضائية

★ المتتاليات والمتسلسلات

★ المتجهات

تأليف

صالح رشيد بطارسة

الرياضيات الشاملة

★ الهندسة الفضائية

★ المتتاليات والمتسلسلات

★ المتجهات

تأليف

صالح رشيد بطارسة

الرياضيات الشاملة

★ الهندسة الفضائية

★ المتتاليات والمتسلسلات

★ المتجهات

تأليف

صالح رشيد بطارسة

الرياضيات الشاملة

★ الهندسة الفضائية

★ المتتاليات والمتسلسلات

★ المتجهات

تأليف

صالح رشيد بطارسة

الرياضيات الشاملة

★ الهندسة الفضائية

★ المتتاليات والمتسلسلات

★ المتجهات

تأليف

صالح رشيد بطارسة

الرياضيات الشاملة

★ الهندسة الفضائية

★ المتتاليات والمتسلسلات

★ المتجهات

تأليف

صالح رشيد بطارسة

دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

الناشر
دار أسامة للنشر و التوزيع

الأردن - عمان

- هاتف: 5658252 - 5658253
- فاكس: 5658254
- العنوان: العبدلي - مقابل البنك العربي
- ص. ب: 141781

Email: darosama@orange.jo

www.darosama.net

حقوق الطبعة محفوظة

الطبعة الأولى

2014م

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2013/6/2214)

510

بطارسة، صالح رشيد

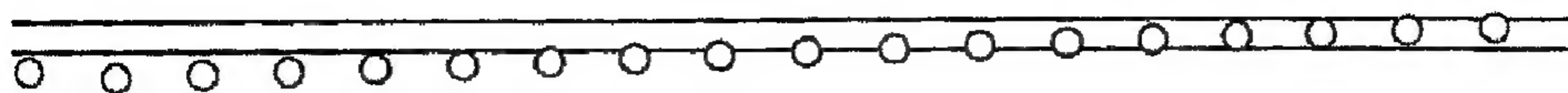
الرياضيات الشاملة/صالح رشيد بطارسة. - عمان: دار أسامة
للنشر والتوزيع، 2013.

() ص.

ر.أ: (2013/6/2214).

الواصفات: الرياضيات/

ISBN: 978-9957-22-385-4



الفهرس

٣	الفهرس
٧	المقدمة
٩	تتويه

الهندسة الفضائية

١٣	المجسمات: Solids
٢٨	المُسميات Notions
٢٩	المُسلمات Axioms
٣٤	النظريات Theorems
٣٥	العلاقة بين المستقيمات في الفضاء
٣٨	العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفضاء
٣٩	العلاقة بين مستويين في الفضاء
٤٠	نظريات بالتوازي Paralleism Theorems
٤٤	نظريات التعامد Perpendicularity Theorems



٤٧ The Even Angle الزاوية الزوجية
٥٠ Perpendicular Projection الإسقاط العمودي
٥٥ أمثلة محلولة على الهندسة الفضائية
٦٨	. أسئلة وتدريبات وقوانين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

المتتاليات والمتسلسلات

٨٣ المتتالية والمتسلسلة
٨٣ Seguece المتتالية؛
٨٩ المتتاليات والمتسلسلات الحسابية
٨٩ Arithmetic Sequence المتتالية الحسابية
٩١ Arithmetic Series أما المتسلسلة الحسابية
٩٦ Sum of A. S. مجموع المتسلسلة الحسابية
٩٨ المتتاليات والمتسلسلات الهندسية
٩٨ Geometric Sequence المتتالية الهندسية
١١٠	Convergent Infinite G. s المتسلسلة الهندسية اللانهائية التقاربية
١١٥ متتاليات ومتسلسلات هامة في الرياضيات



١٢١	أمثلة محلولة على المتتاليات والمتسلسلات
١٤١	أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين .

المتجهات

١٦٣	العمليات الهندسية والجبرية على المتجهات في المستوى
١٦٤	المتجه الصفري Zero Vector
١٦٤	متجه الوحدة Unite Vector
١٦٤	المتجهات الحرة Free Vectors
١٦٤	جمع المتجهات:
١٦٤	قاعدة متوازي الأضلاع لجمع المتجهات:
١٦٥	قاعدة المثلث لجمع المتجهات:
١٦٦	سالب المتجه:
١٦٧	ضرب المتجه بعدد حقيقي:
١٧١	جبر المتجهات في المستوى:
١٧٦	العمليات الهندسية والجبرية على المتجهات في الفضاء
١٨٦	الضرب الداخلي Inner Product



١٩٢	الضرب المتجهي Vactor Product
٢٠٤	أمثلة محلولة على المتجهات
٢١٨	أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين
٢٢٤	المراجع



المقدمة

بعد الاتكال على الله، ، ،

قمت بتأليف وإعداد هذه السلسلة من الرياضيات تحت عنوان "الرياضيات الشاملة". بمضمون كامل وعلم وافر وأسلوب نادر، نعم إنه أسلوب علمي بسيط يخلو من الحشو والغموض والتعقيد، كونه يعتمد على الاكثار من الأمثلة والتمارين لتوضيح المصطلحات والمفاهيم دون تكرار منفرد للدارسات والدارسين وبلا إيجاز مُدمر للنظريات والقوانين.

من المعلوم أن الرياضيات قديمة قدم الزمان وهبها الله للإنسان منذ أن خلق أبانا آدم وأمنا حواء. ولكن الآن ما عادت الرياضيات كما كانت عليه من أزمان مجرد مجموعة من الرموز والاشارات والأعداد..

ومع أنها كذلك إلا أنها أصبحت بالإضافة الى ذلك ضرورة من ضرورات الحياة كالهواء والماء والغذاء.. التي يحتاجها الانسان للقضاء على الجهل والفقر والمرض... تلك الآفات التي لا تتعايش إلا مع من تخلف من البشر،

لذا لا بُدَّ من القول إن:

الرياضيات جسرٌ للعبور الى عصر التكنولوجيا والعلوم الزاخر بالاختراعات والابتكارات والفنون، والتي نحن بحاجة ماسة اليها جميعاً لتسيير عجلة الحياة بكل يسر وبلا معاناة.

الرياضيات إن كنت لا تعلم هي بالذات معشوقة الجماهير المحبة للعلم، والقادرة على التفكير، ولكن لا يجرؤ على عشقها من البشر إلا من كان قوي الإرادة سريع البديهة سليم العقل والجسم معاً. وصدق من قال في هذا المضمار "العقل السليم في الجسم السليم". وأصدق منه من يقول: "الرأس بلا تفكير كالإناء المشروخ، كلاهما يستحق التكسير".

~ الرياضيات إن كنت لا تدري تُثمي الذكاء وتُشدُّب الأخلاق وتسمو بالإنسان إلى العلاء، كيف لا؟ وجميع رواد الفضاء من العلماء والرياضيين (علماء الرياضيات).

~ الرياضيات لا تحتاج من دارسها الكثير من الجهد والعناء، بل يجب عليه الإلمام البسيط بالقوانين والنظريات، ولكن ليس كالبغاوات بالحفظ دون الفهم! وإنما تحتاج إلى التدريب الكتابي الكافي، وباستمرار مع الدقة والإتقان والسرعة قدر الإمكان.

~ فيادارس الرياضيات عليك استخدام "الورقة والقلم" أفضل وسيلة لدراسة العلوم قاطبة، ، ، لتصبح بعد مدة من الزمن من علماء الرياضيات البارزين.. ونؤكد ونختتم على ذلك بقولنا آمين!...

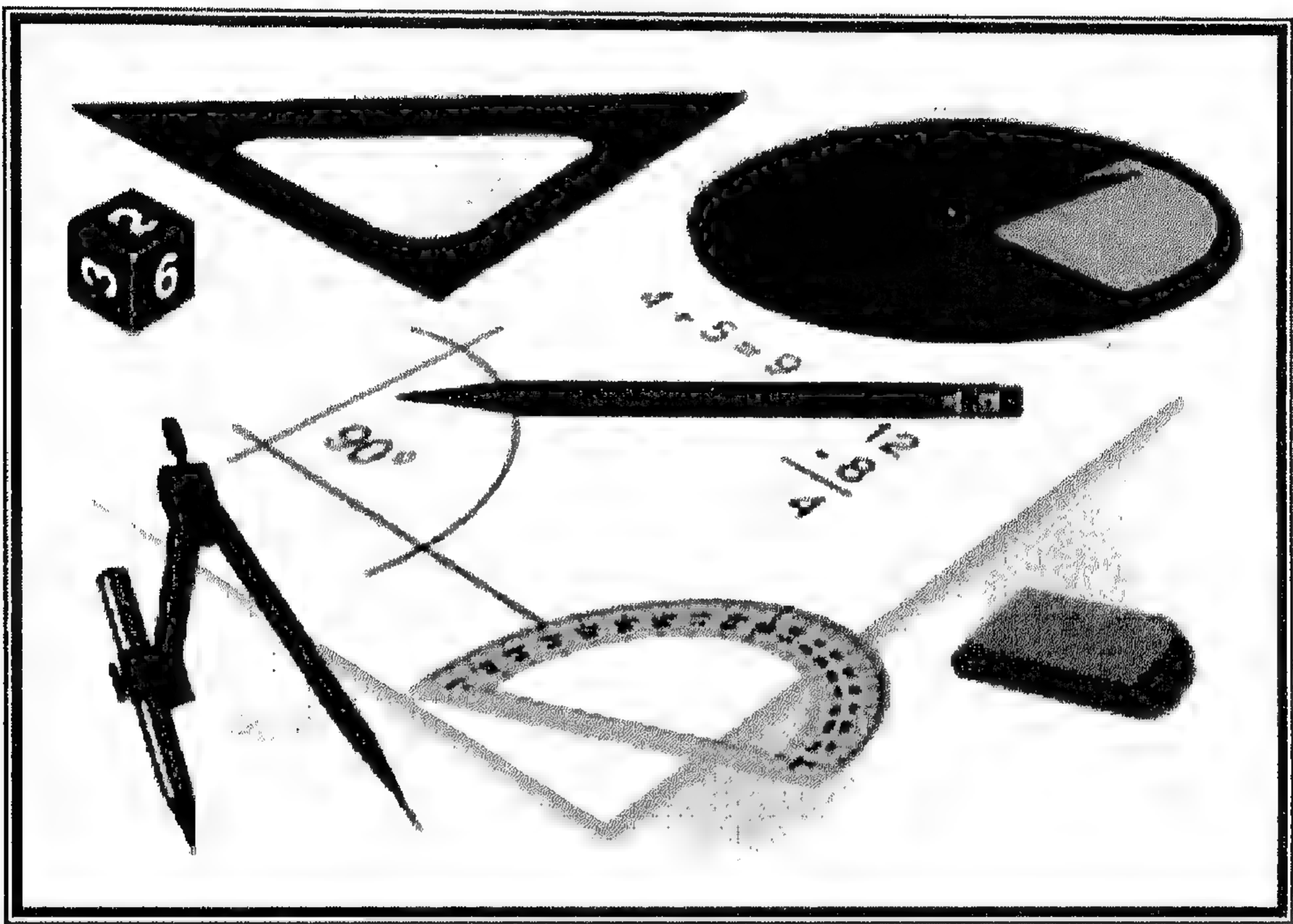
المؤلف

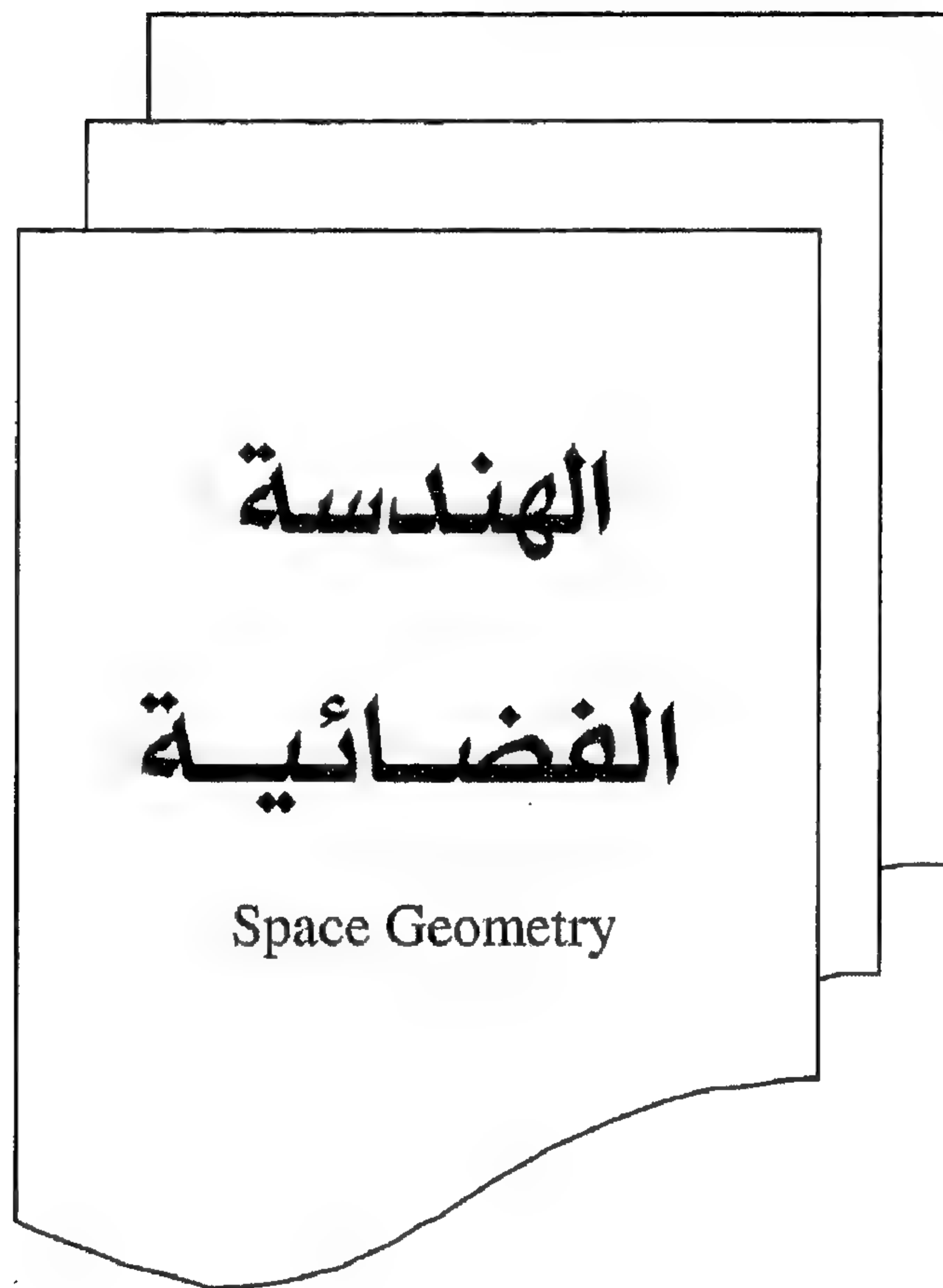
تنويه

في هذا السياق لا بد لي من أن أنبه الى هذه الملحوظة
منذ البداية فأقول:

بما أننا نعيش عصر العلم والتكنولوجيا، وجب علينا
استخدام الحواسيب والآلات الحاسبة لتسهيل اجراء العمليات
الرياضيات، واستخراج نتائجها بكل دقة واتقان، وبالسرعة
التي يتصف بها هذا الزمان".

المؤلف

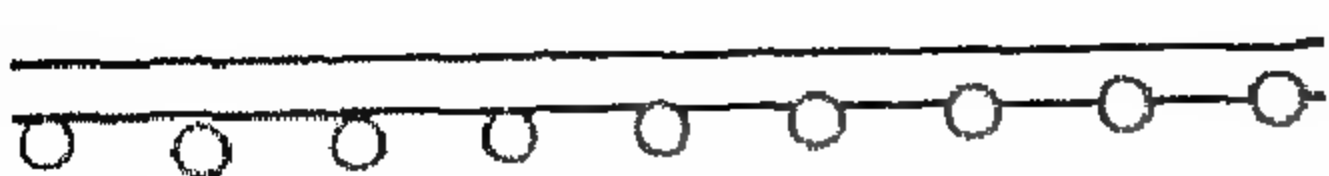
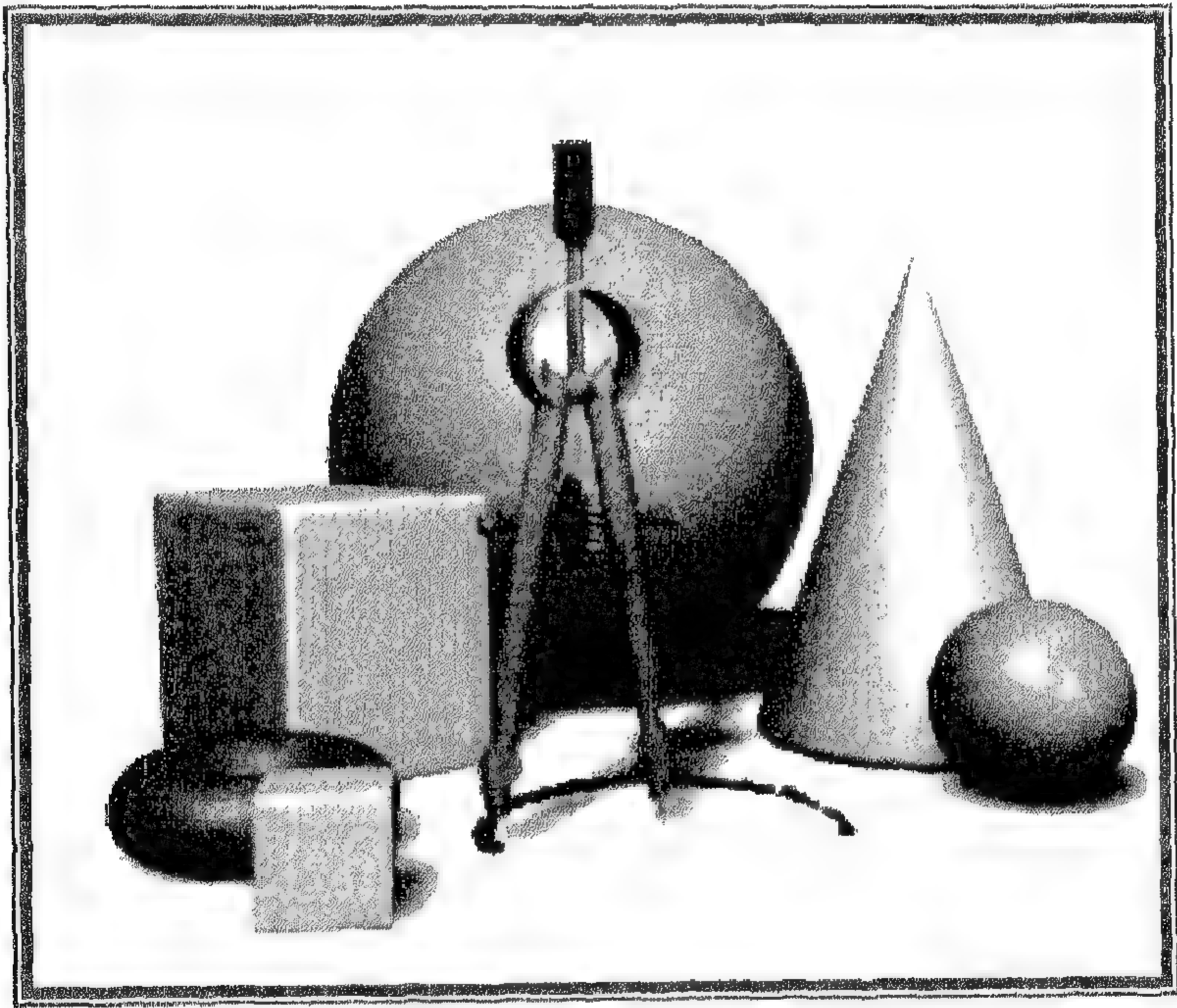




الهندسة

الفضائية

Space Geometry





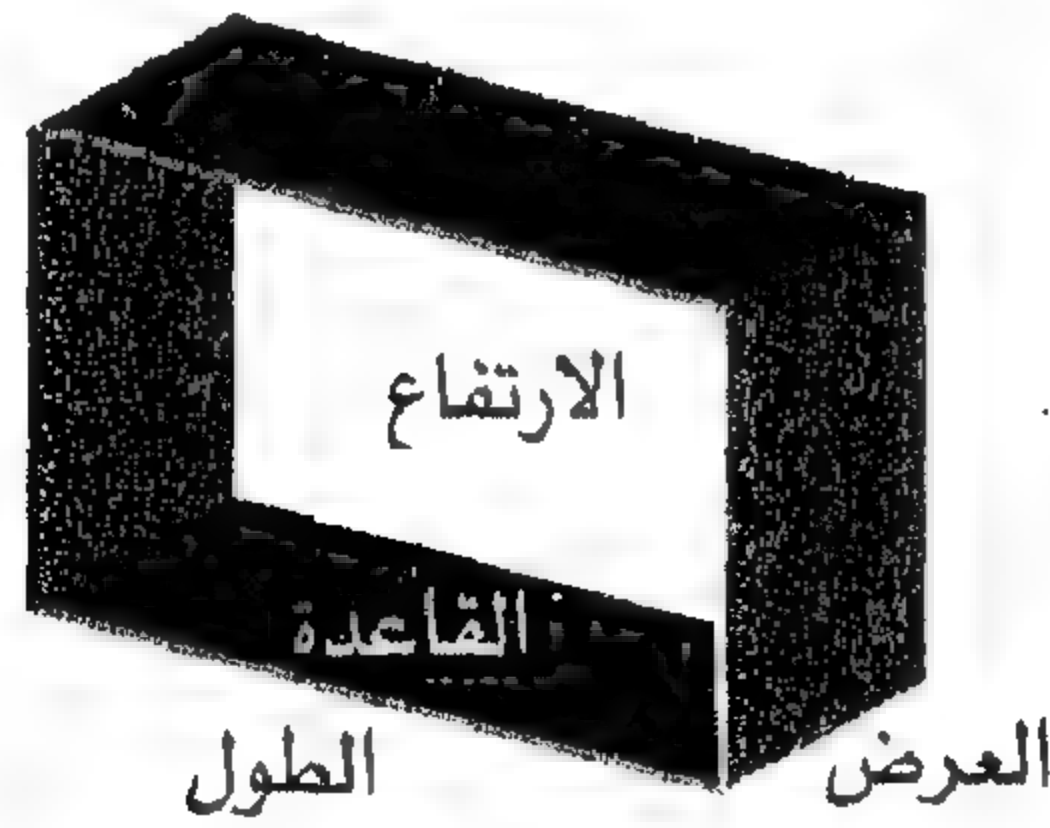
الهندسة الفضائية فرع من فروع الهندسة القديم، ابتكر قبل ألاف السنين في الوقت الذي شعر فيه الإنسان بحاجته الماسة لمعرفة أشكال الأجسام المتناثرة حوله في جميع الأركان، يرجع تاريخها إلى الإغريق وقدماء المصريين والبابليين.

(١٤ - ١) المجسمات Solids:

تبحث الهندسة الفضائية في العلاقة بين المستقيمات والمستويات التي يحتويها الفضاء لهذا فهي تختص بدراسة المجسمات كمتوازي المستطيلات والمكعب والموشور والهرم والإسطوانة والمخروط والكرة من حيث حجومها ومساحات سطوحها كما في هذه السطور:

أولاً: متوازي المستطيلات Rectangular Solid

متوازي المستطيلات مجسم ذو ثلاثة أبعاد هي الطول والعرض والارتفاع، له قاعدتان متطابقتان هما وجهان متقابلان من وجوه الستة المستطيلة كما في الشكل.



وبإيجاز شديد:

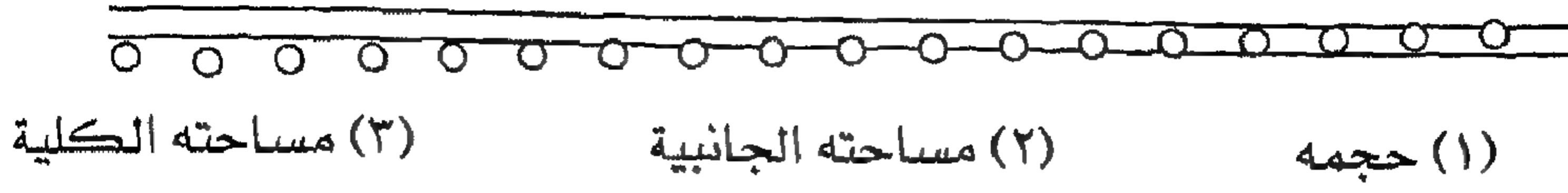
حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع (وحدة حجم)

مساحته الجانبية = محيط إحدى القاعدتين × الارتفاع

مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحتي قاعدتيه

مثال: متوازي مستطيلات أبعاده ٨ سم، ٦ سم، ٥ سم.

احسب:

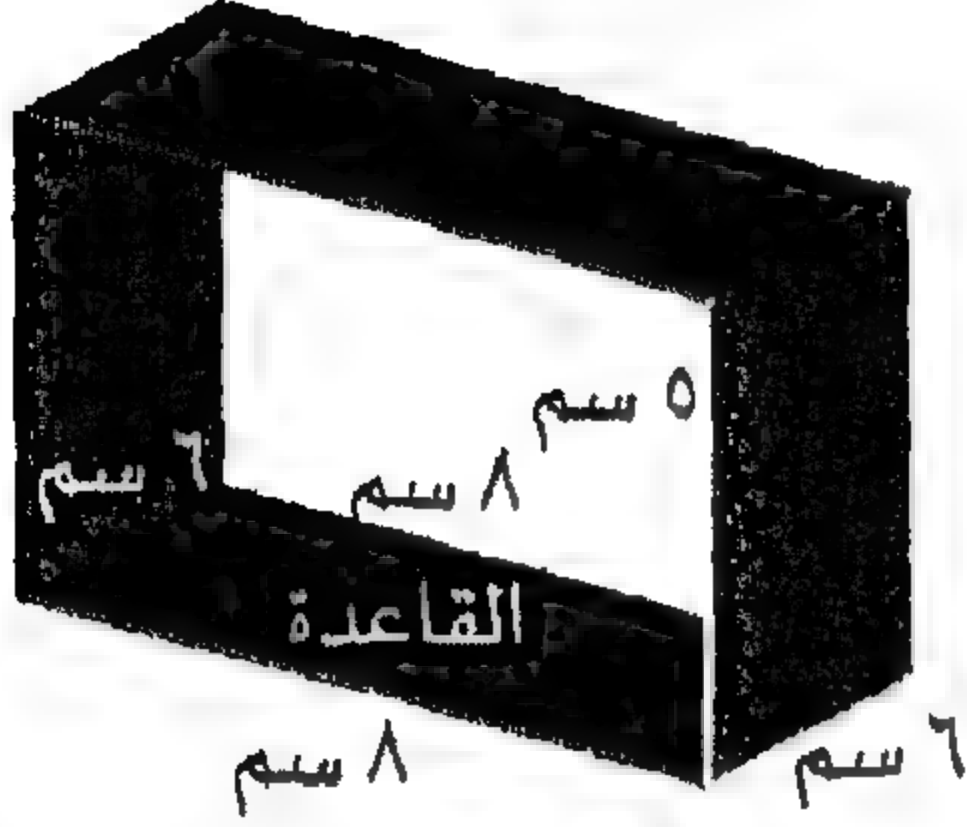


حجمه = الطول × العرض × الارتفاع

$$= 8 \times 6 \times 5 = 240 \text{ سم}^3$$

مساحته الجانبية = محيط إحدى القاعدتين × الارتفاع

= (مجموع أضلاع القاعدة) × الارتفاع



$$= 5 \times (8 + 6 + 8 + 6) =$$

$$= (5) (28) =$$

$$= 140 \text{ سم}^2$$

مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحتي قاعدتيه

$$= 140 + 2(8 \times 6) =$$

$$= 140 + 96 =$$

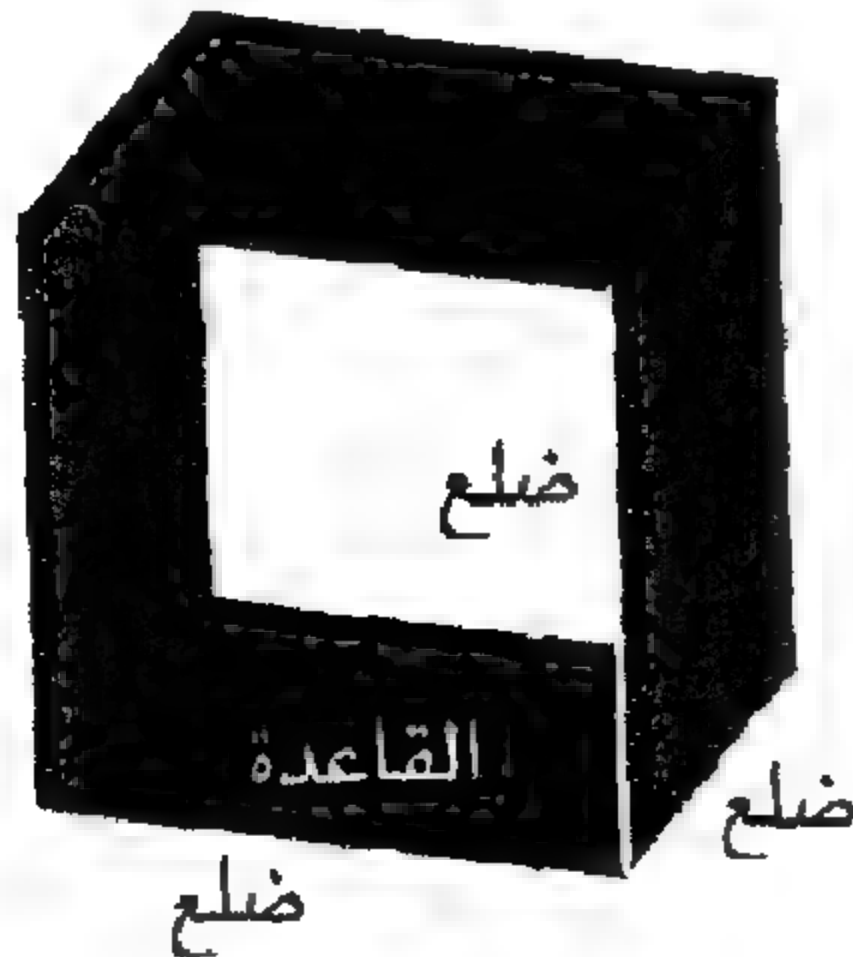
$$= 236 \text{ سم}^2$$

ثانياً: المكعب Cubic

والمكعب مجسم ذو ثلاثة أبعاد متطابقة تماماً يسمى كل منها حرف أو

ضلع المكعب، سطوحه أو أوجهه الستة مربعات متطابقة أيضاً، له قاعدتان هما

مربعان متقابلان كما في الشكل





حجم المكعب = الضلع \times الضلع \times الضلع

$$= (\text{الضلع})^3$$

مساحته الجانبية = محيط إحدى القاعدتين \times ارتفاعه (طول ضلعه)

$$= (\text{ضلع} + \text{ضلع} + \text{ضلع} + \text{ضلع}) (\text{ضلع})$$

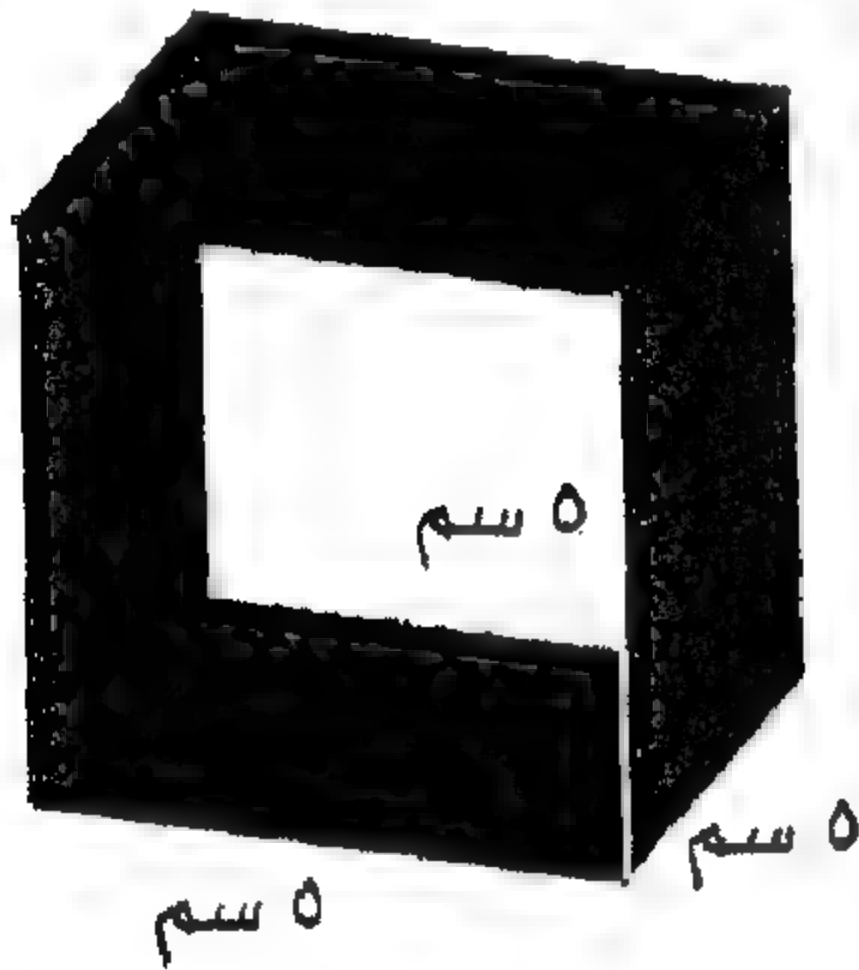
$$= 4 (\text{ضلع})^2$$

مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحة قاعدتيه

$$= 4 (\text{ضلع})^2 + 2 (\text{ضلع})^2 = 6 (\text{ضلع})^2$$

مثال: مكعب طول ضلعه أو حرفه ٥ سم احسب حجمه، مساحته

الجانبية، مساحته الكلية.



$$\text{حجمه} = 5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ سم}^3$$

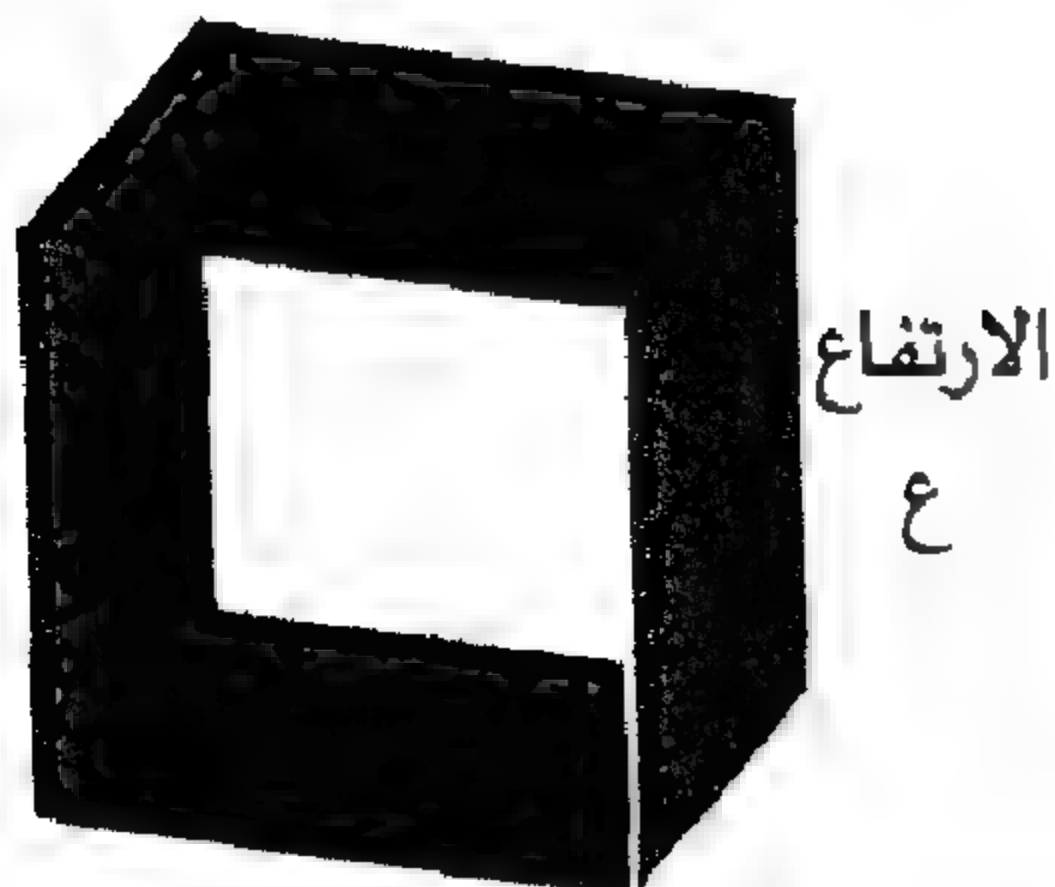
$$\text{مساحته الجانبية} = 4 (5 \times 5) = 100 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحته الكلية} = 100 + 2 (5 \times 5)$$

$$\text{أو } 6 (5 \times 5) = 150 \text{ سم}^2$$

ثالثاً: الموشور القائم Prism

الموشور القائم مجسم له قاعدتان مستويتان متطابقتان، وأسطحه الجانبية أوجهه مستطيلات، يسمى الموشور بدلالة قاعدتيه، فالموشور ثلاثياً إذا كانت كل من قاعدتيه مثلث، والموشور رباعياً إذا كانت كل من قاعدتيه شكل رباعي وهكذا كما في الشكل.



موشور رباعي



موشور رباعي





حجم الموشور القائم = مساحة القاعدة \times الارتفاع حيث \times ارتفاعه

مساحته الجانبية = محيط إحدى قاعدتيه \times ارتفاعه

مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحة قاعدتيه.

مثال: موشور ثلاثي قاعدته مثلث مساحته ١٠ سم^٢، وطول محيطه ٨ سم

احسب حجم الموشور ومساحته الكلية إذا كان ارتفاعه ٧ سم.



٧ سم

حجمه = مساحة القاعدة \times الارتفاع

$$= 10 \times 7 = 70 \text{ سم}^3$$

مساحته الجانبية = محيط إحدى قاعدتيه \times ارتفاعه

$$= 8 \times 7 = 56 \text{ سم}^2$$

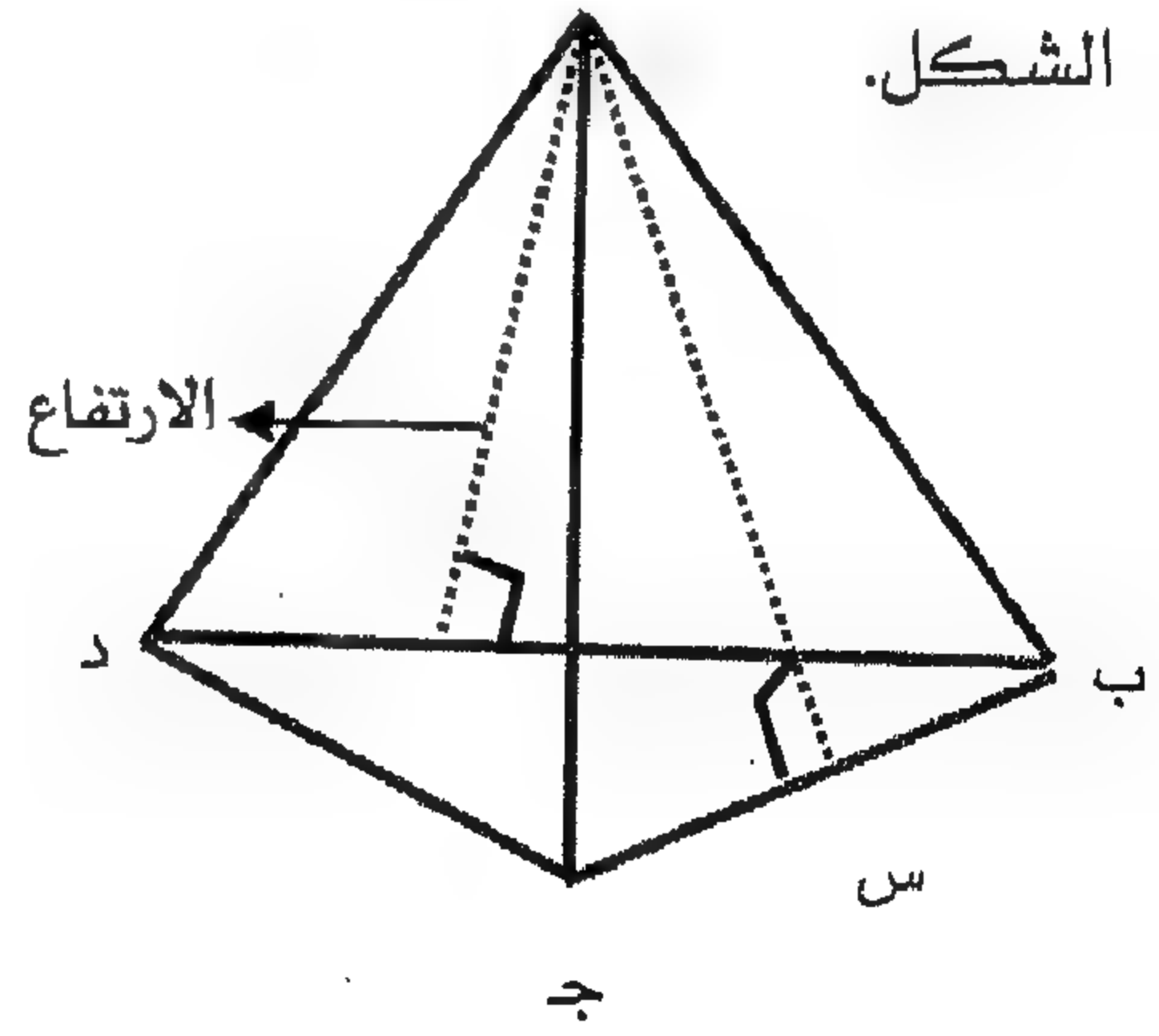
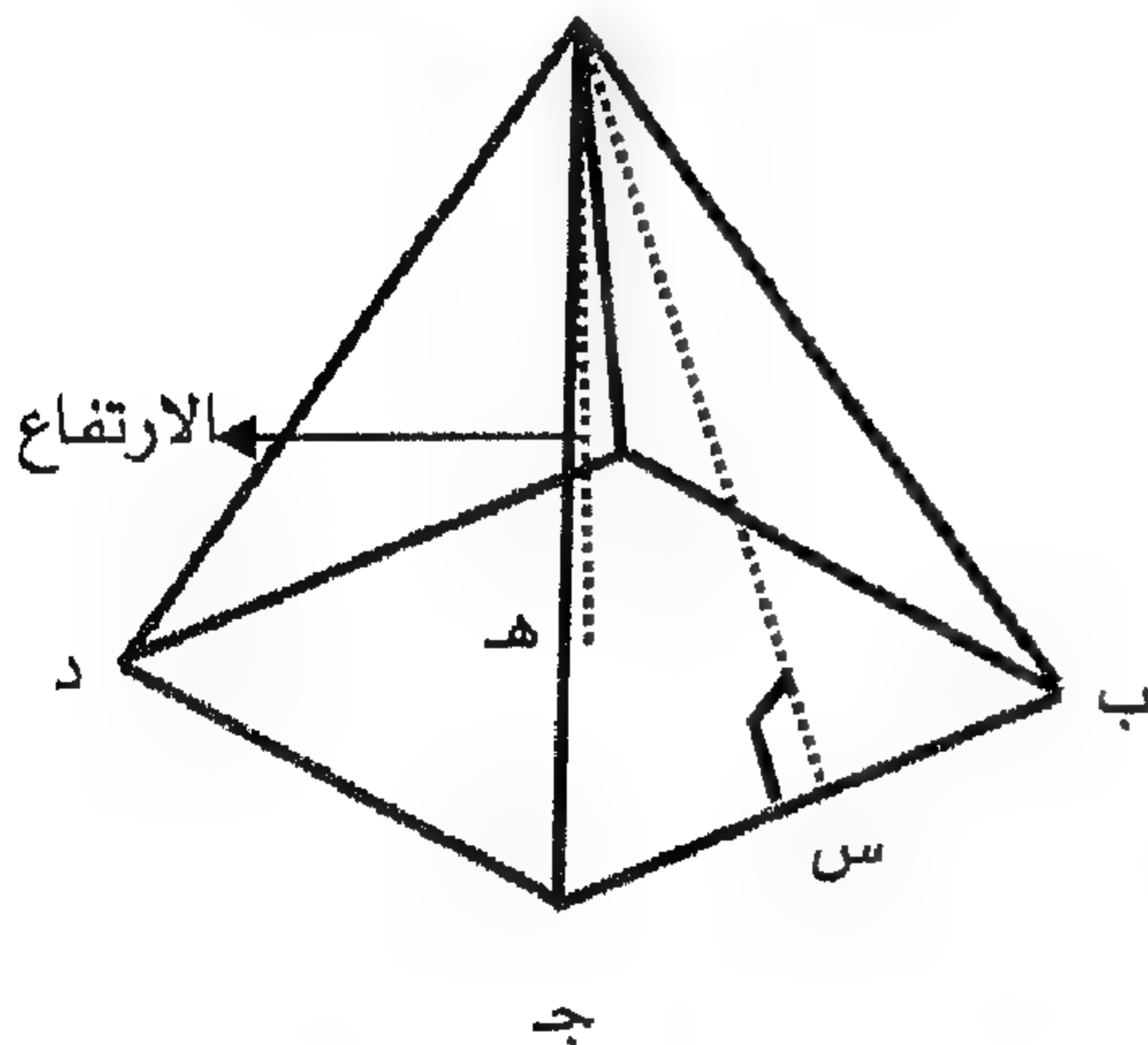
القاعدة
المساحة = ١٠ سم^٢
المحيط = ٨ سم

مساحته الكلية = ٥٦ + مساحة قاعدتيه.

$$= 56 + 2(10) = 76 \text{ سم}^2$$

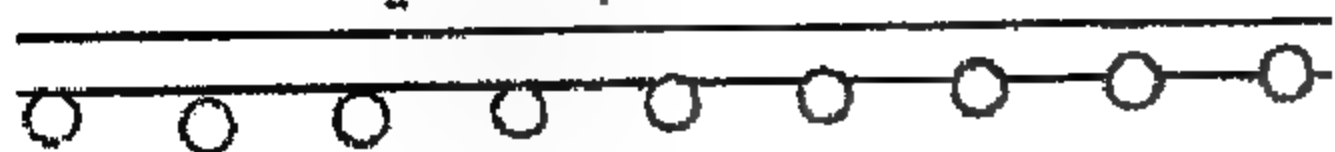
رابعاً: الهرم Pyramind

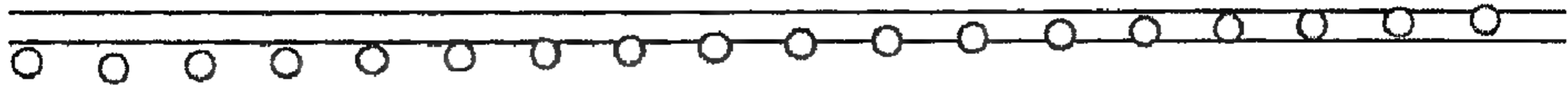
الهرم القائم مجسم له قاعدته واحدة يقابلها رأس واحد فقط، يُسمى الهرم بدلالة قاعدته فهو هرم ثلاثي إذا كانت قاعدته مثلث وهرم رباعي إذا كانت قاعدته شكل رباعي (مربع، مستطيل، متوازي أضلاع، معين) وهكذا كما في الشكل.



هرم رباعي

هرم ثلاثي





حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة \times الارتفاع

مساحته الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة \times الارتفاع الجانبي (أس بالشكل)

مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته

مثال: هرم رباعي قاعدته مربع طول ضلعه ١٠ سم وارتفاعه ٨ سم

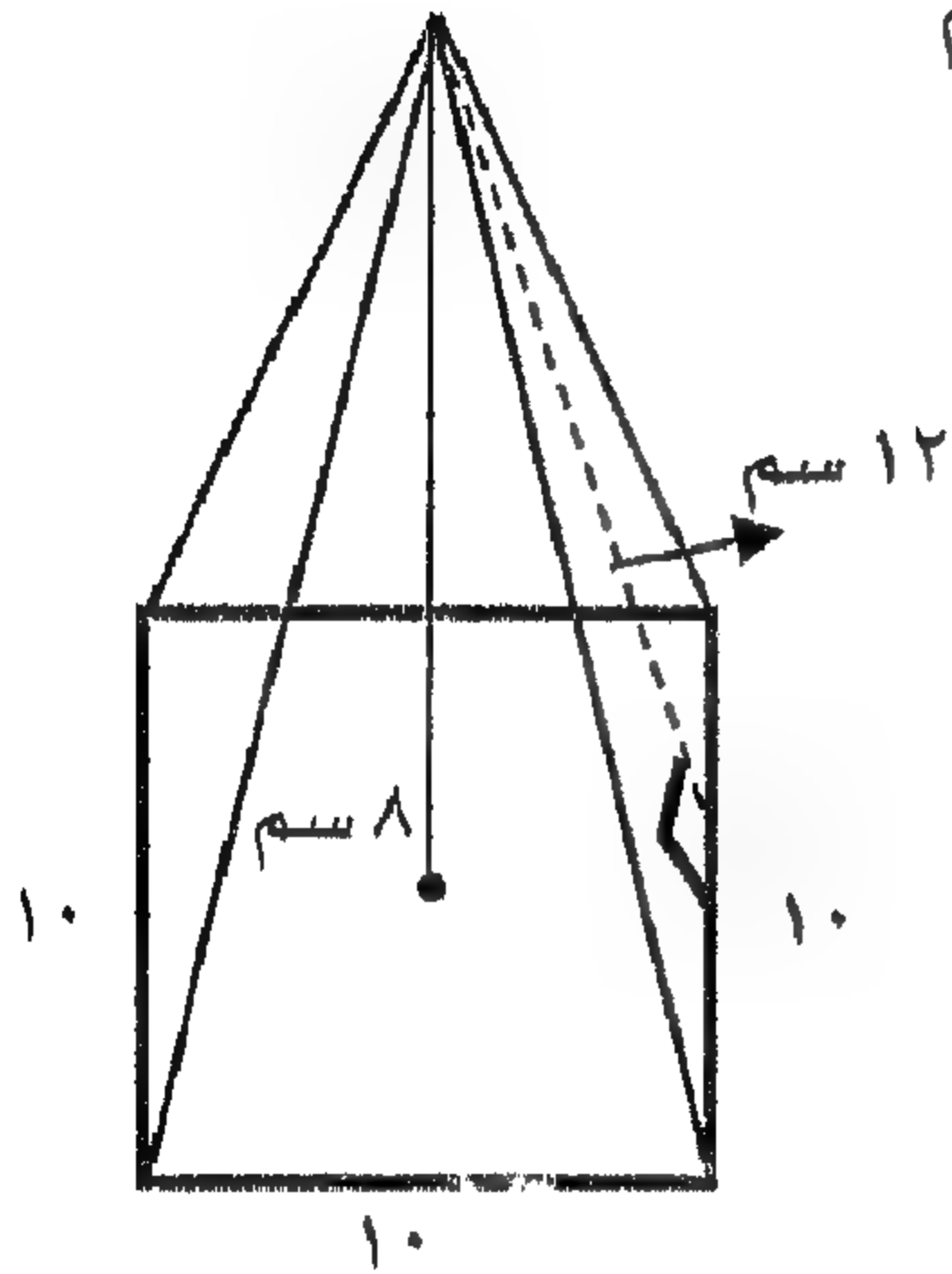
وارتفاعه الجانبي ١٢ سم احسب:

(١) حجمه (٢) مساحته الجانبية (٣) مساحته الكلية

$$\text{حجمه} = \frac{1}{3} \times (10)^2 \times 8 = 266,6 \text{ سم}^3$$

$$\text{مساحته الجانبية} = \frac{1}{2} \times (4 \times 10) \times 12 = 120 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحته الكلية} = (10 \times 10) + 120 = 220 \text{ سم}^2$$



خامساً: الاسطوانة Cylinder

الأسطوانة جسم (مجسم) دوراني

ينشأ عن دوران مستطيل حول أحد أبعاده

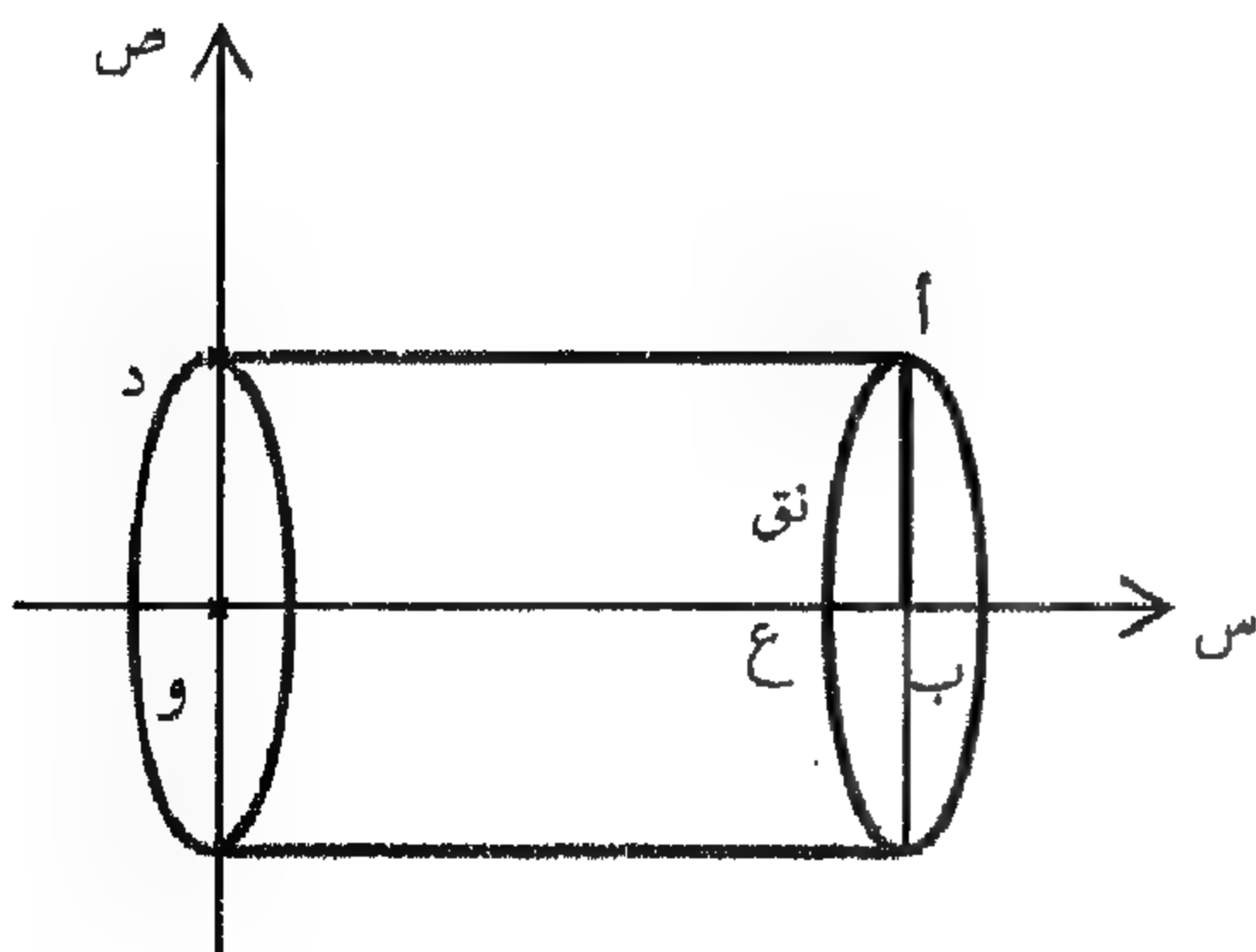
في الفضاء دورة كاملة كما في الشكل

فالأسطوانة في الشكل نشأت من دوران

المستطيل أ ب و د حول البعد ب و المنطبق

على محور السينات دورة كاملة

فتشكلت قاعدتها الدائريتان،





والاسطوانة لها قاعدتان متطابقتان تماماً.

حجم الاسطوانة = $\pi r^2 h$ حيث r نصف قطر كل قاعدة من قاعدتها

$$\frac{22}{7} = 3.14 = \pi$$

h ارتفاعها

مساحتها الجانبية = $2\pi r h$

مساحتها الكلية = $2\pi r h + \pi r^2$ مساحتي قاعدتيها

$$= 2\pi r h + \pi r^2$$

مثال: أسطوانة نصف قطرها 7 سم وارتفاعها 12 سم أوجد حجمها

ومساحتها الجانبية والكلية.

$$\text{الحجم} = \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 12 = 1848 \text{ سم}^3$$

مساحتها الجانبية = $2\pi r h$

$$= (2) (7) (3.14) (12)$$

$$= 727.52 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحتها الكلية} = 727.52 + \pi r^2 = 727.52 + \left(\frac{22}{7}\right) (7)^2 = 1035.52 \text{ سم}^2$$

$$= 1035.52 \text{ سم}^2$$

سادساً: المخروط القائم Cone

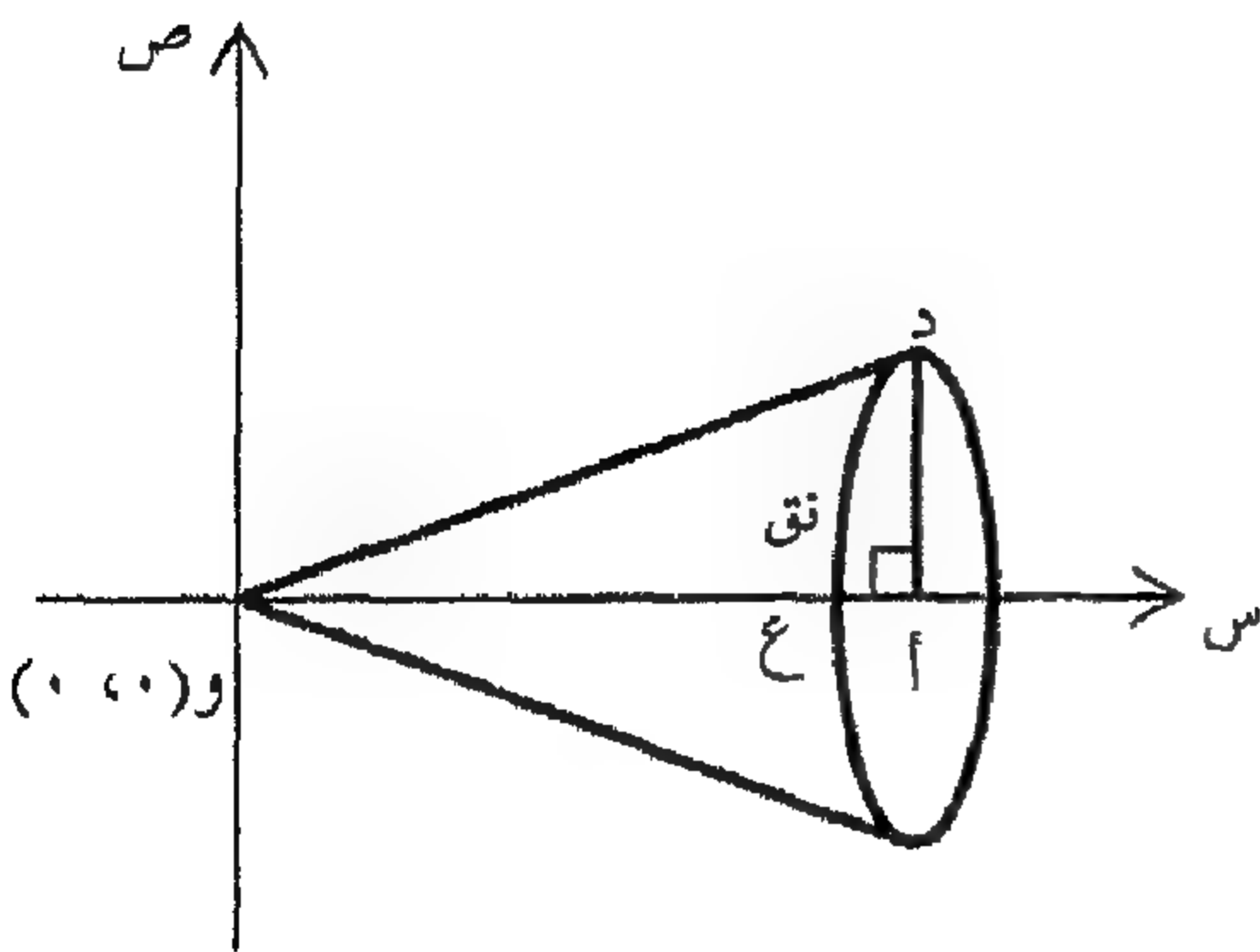
المخروط جسم (مجسم) دوراني

ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية في

الفضاء حول أحد ضلعي القائمة دورة

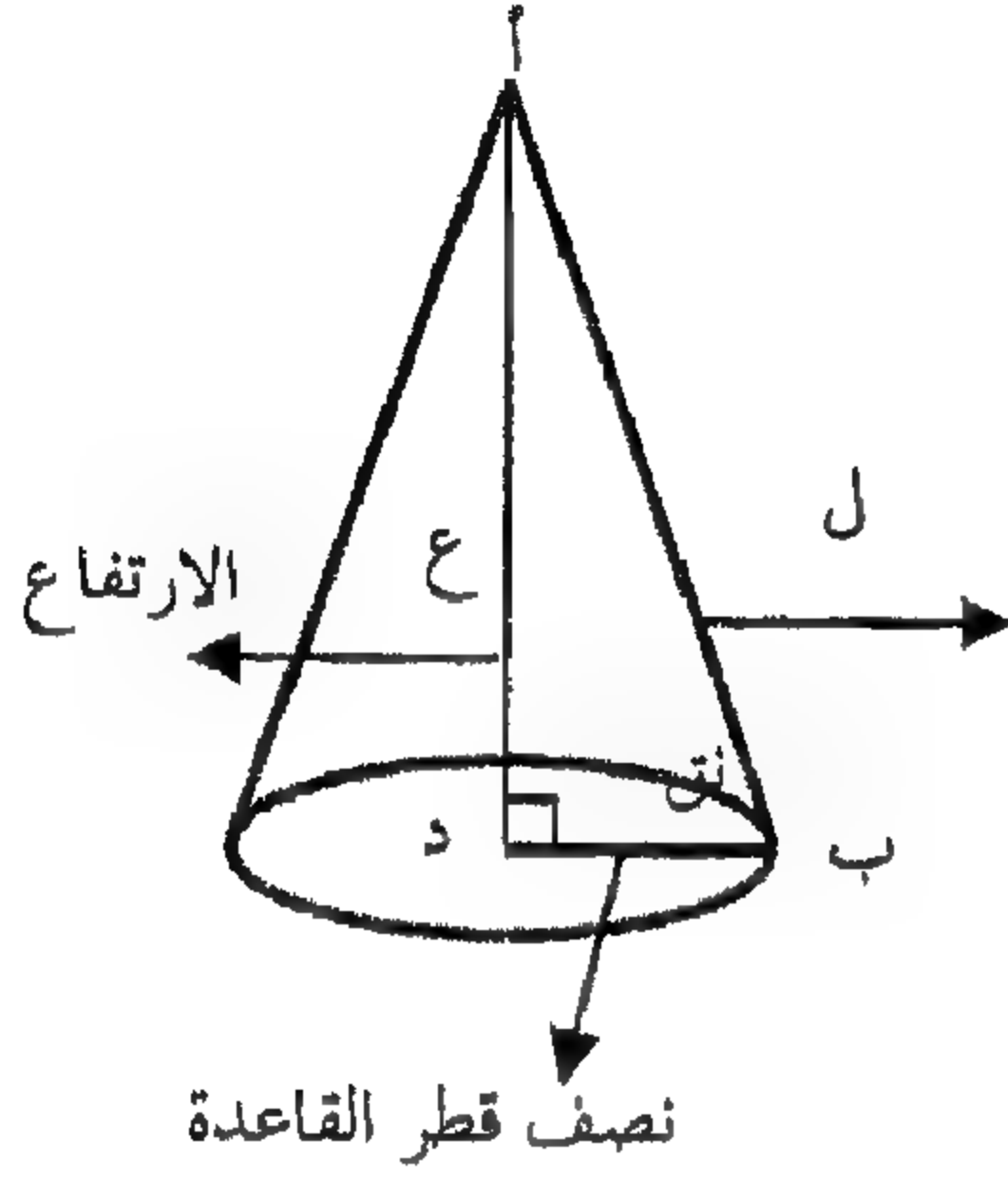
كاملة كما في الشكل فالمخروط نشأ

من دوران المثلث أ و ب حول الضلع أ د



المنطبق على محور السينات دورة كاملة فشكلت قاعدته الدائرية، للمخروط قاعدة واحدة فقط.

حجم المخروط = $\frac{1}{3} \pi \text{ نق}^2 \text{ ع}$ حيث نق نصف قطر قاعدة المخروط الدائرية



ع ارتفاع المخروط

$$\pi = \frac{22}{7} \text{ أو } 3.14$$

مساحته الجانبية = $\pi \text{ نق ل}$ حيث ل

راسم المخروط كما في الشكل

مساحته الكلية = $\pi \text{ نق ل} + \pi \text{ نق}^2$

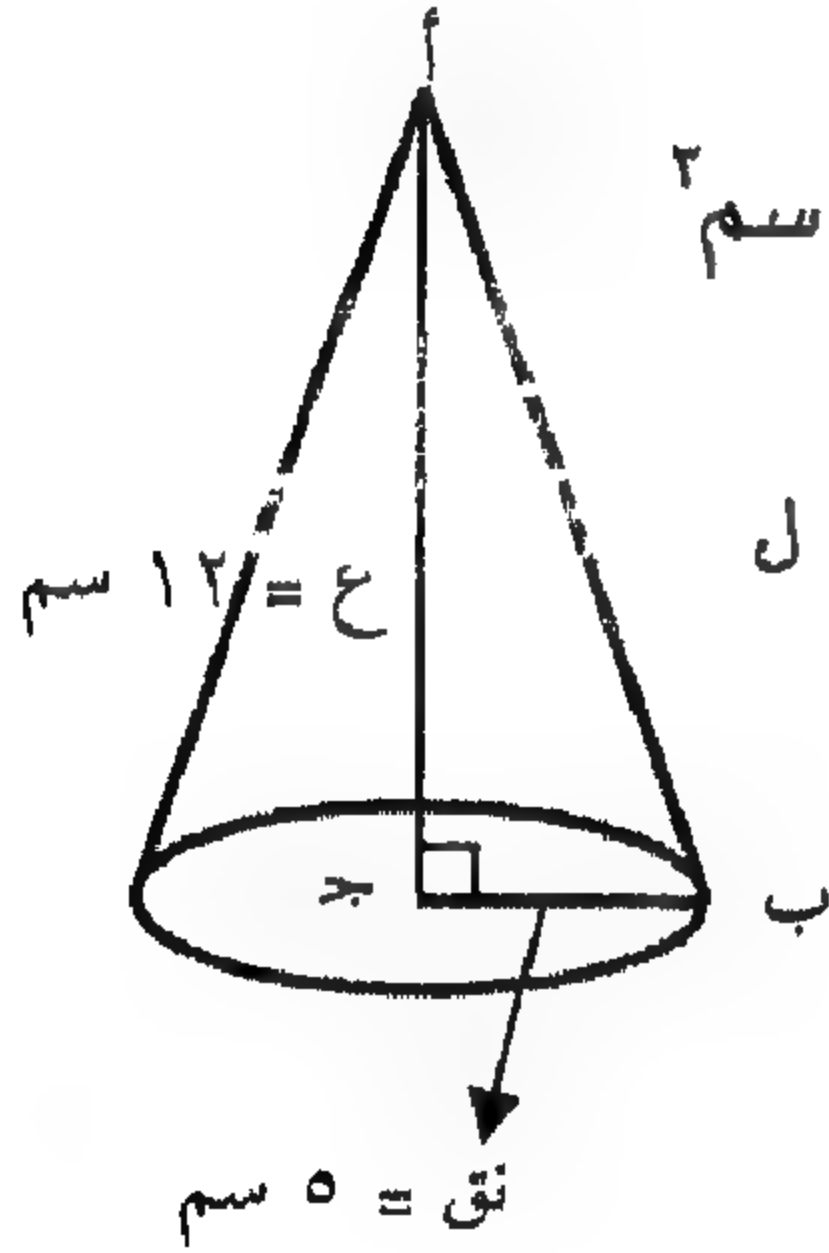
والعلاقة بين الراسم (ل) والارتفاع (ع) ونصف

القطر (نق) توضح هكذا:

$$ل^2 = ع^2 + \text{نق}^2 \text{ (نظرية فيثاغورس) حيث المثلث أ د ب قائم الزاوية.}$$

مثال: مخروط قائم نصف قطر قاعدته ٥ سم وارتفاعه ١٢ سم احسب

حجمه ومساحته الجانبية ومساحته الكلية (عند $\pi = 3.14$)



$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3} \pi \text{ نق}^2 \text{ ع} = \left(\frac{1}{3}\right) (3.14) (5)^2 (12) = 314 \text{ سم}^3$$

مساحته الجانبية = $\pi \text{ نق ل}$

حيث ل = ١٣ سم من فيثاغورس

$$= (3.14) (5) (13) = 204.1 \text{ سم}^2$$

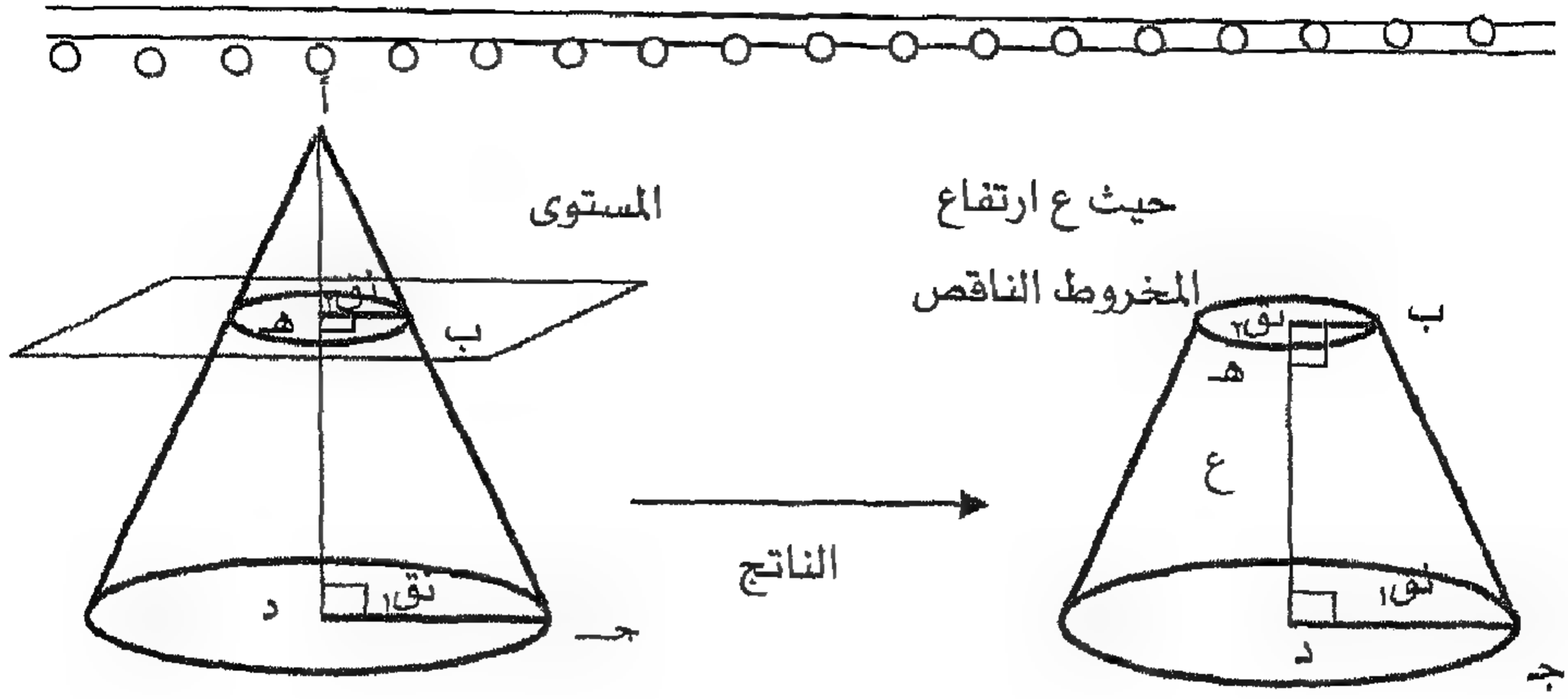
مساحته الكلية = الجانبية + مساحة قاعدته

$$= (204.1) + 78.5 = 282.6 \text{ سم}^2$$

وهناك المخروط الناقص المتوازي القاعدتين والناتج عن قطع مخروط دائري

قائم بمستوى يوازي قاعدته شرط أن يكون المقطع الحادث دائرة نصف قطرها

أصغر من نصف قطر قاعدة المخروط كما في الشكل.



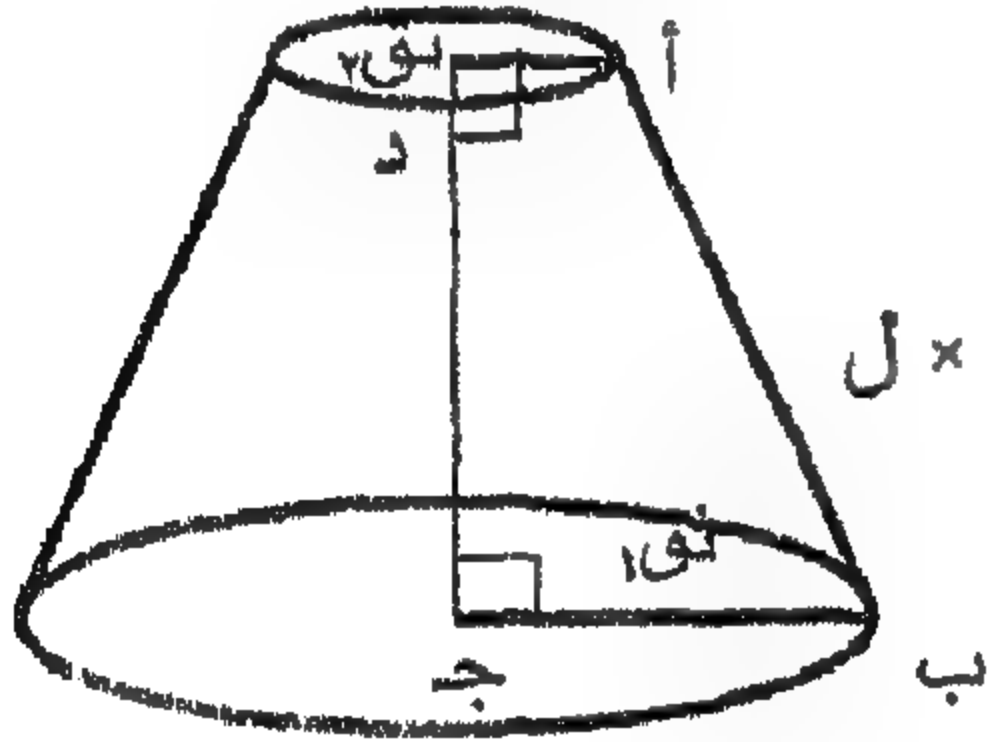
وبإيجاز شديد ودون برهان نستطيع القول أن:

$$(1) \text{ حجم المخروط الناقص } = \frac{1}{3} \pi \text{ ع } (\text{نق ١}^2 + \text{نق ١} \text{ نق ٢} + \text{نق ٢}^2)$$

حيث: ع ارتفاعه

نق ١، نق ٢ نصف قطر قاعدتيه كما في الشكل السابق.

(2) أما مساحته الجانبية = $\frac{1}{2}$ مجموع محيطي القاعدتين \times الراسم كما في الشكل



«حيث ل الراسم»

$$\text{أي أن مساحته الجانبية} = \frac{1}{2} \{ \pi \text{ نق ٢} + \pi \text{ نق ١} \} \times \text{ل}$$

وكان سطح المخروط الناقص شبه منحرف

ارتفاعه الراسم ل

(3) وأما مساحتها الكلية = مساحته الجانبية + مساحتي القاعدتين

$$= \text{مساحته الجانبية} + (\pi \text{ نق ١}^2 + \pi \text{ نق ٢}^2)$$

مثال: مخروط دائري قائم ناقص، نصف قاعدتيه ٤ سم، ٦ سم وارتفاعه

$$٧ \text{ سم أوجد حجمه ومساحته الكلية أيضاً باعتبار } \pi = \frac{22}{7}$$

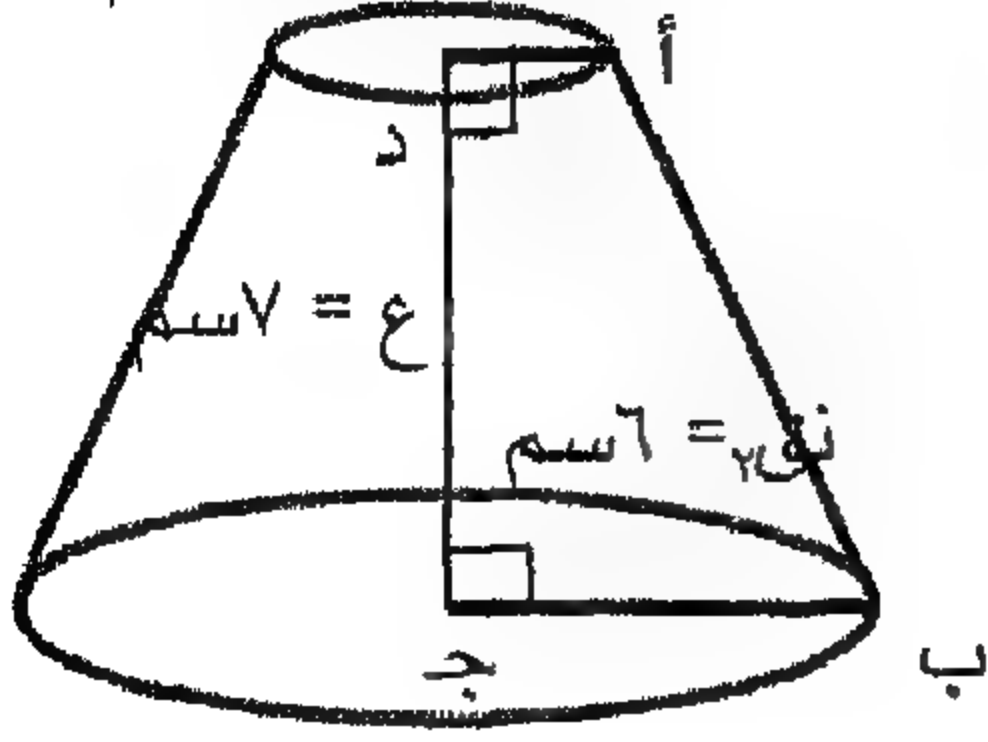
الحل:

$$\text{حجم المخروط الناقص} = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times ٧ \times (٤^2 + (٦ \times ٤) + ٦^2)$$



$$76 \times \frac{22}{3} = \{36 + 24 + 16\} \frac{22}{3} =$$

نق_١ سم = ٤



$$= \frac{1672}{3} = 557,33 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحته الجانبية} = \frac{1}{2} \times \{ \pi \times 2 \times \text{نق} + \pi \times 2 \times \text{نق} \} \times \text{ل}$$

نجد طول الراسم ل هكذا.

المثلث أ ه ب قائم الزاوية فيه

$$\text{ب ه} = ٤ - ٦ = ٢ \text{ سم (الفرق بين نصفي قطري القاعدتين)}$$

$$\text{أ ه} = ٧ \text{ سم الارتفاع}$$

$$\text{لكن ل}^2 = (٧)^2 + (٢)^2 \text{ فيثاغورس}$$

$$= ٤٩ + ٤ = ٥٣$$

$$\therefore \text{ل} = \sqrt{٥٣} = ٧,٢٨ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{مساحته الجانبية} = \frac{1}{2} \times \left\{ \left(\frac{22}{7} \right) (٦) ٢ + \left(\frac{22}{7} \right) (٤) ٢ \right\} \times ٧,٢٨$$

$$= \left(\frac{22}{7} \right) (٧,٢٨) \left(\frac{1}{2} \right) (٢٠) =$$

$$= 228,09 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحتها الكلية} = \text{الجانبية} + (\pi \times \text{نق}_1^2 + \pi \times \text{نق}_2^2)$$

$$= 228,09 + \left(\frac{22}{7} \times ٦^2 + \frac{22}{7} \times ٤^2 \right) =$$

$$= 228,09 + \frac{22}{7} (٣٦ + ١٦) =$$

$$= 228,09 + \frac{22}{7} (٥٢) =$$

$$= 163,28 + 228,09 =$$

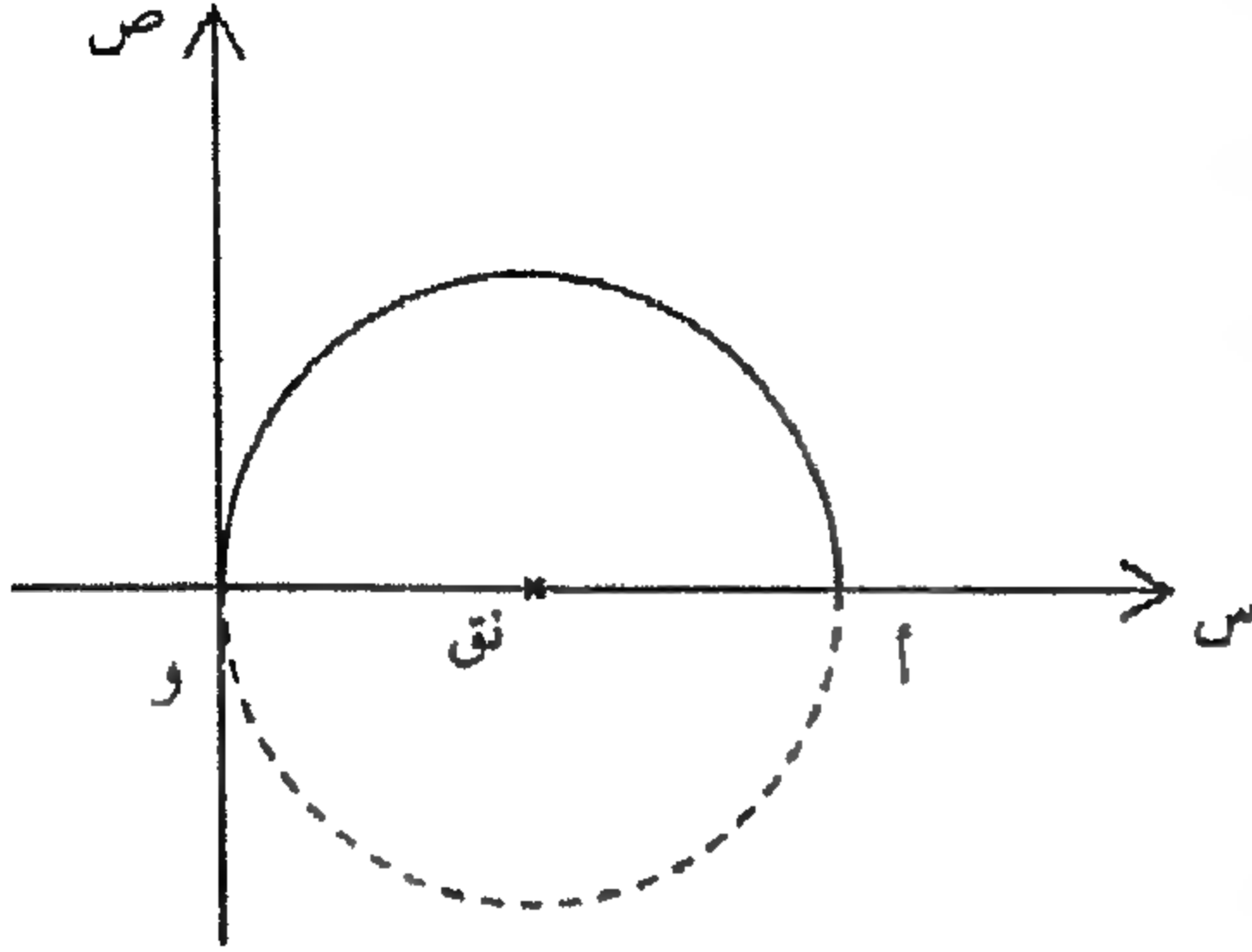
$$= 391,87 \text{ سم}^2$$





سابعاً الكرة Sphere

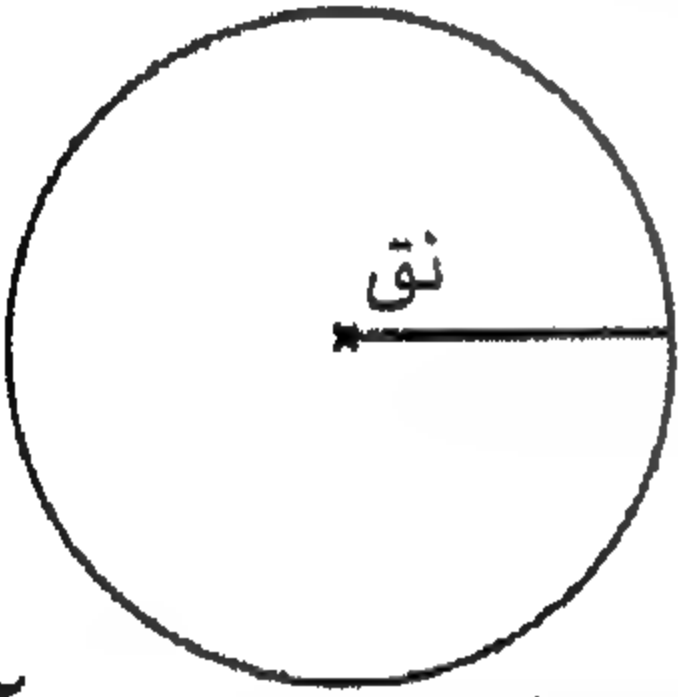
الكرة جسم (مجسم) دوراني ناشئ
عن دوران نصف دائرة في الفضاء دورة
كاملة حول قطرها وكأنه مجسم
غير ثلاثي الأبعاد إذ لا يشاهد له لا
طول ولا عرض ولا ارتفاع كون أبعاده
تظهر له كأقطار كما في الشكل.



فالكرة هنا نشأت من دوران نصف

الدائرة حول قطرها أ و المنطبق على محو السينات دورة كاملة.

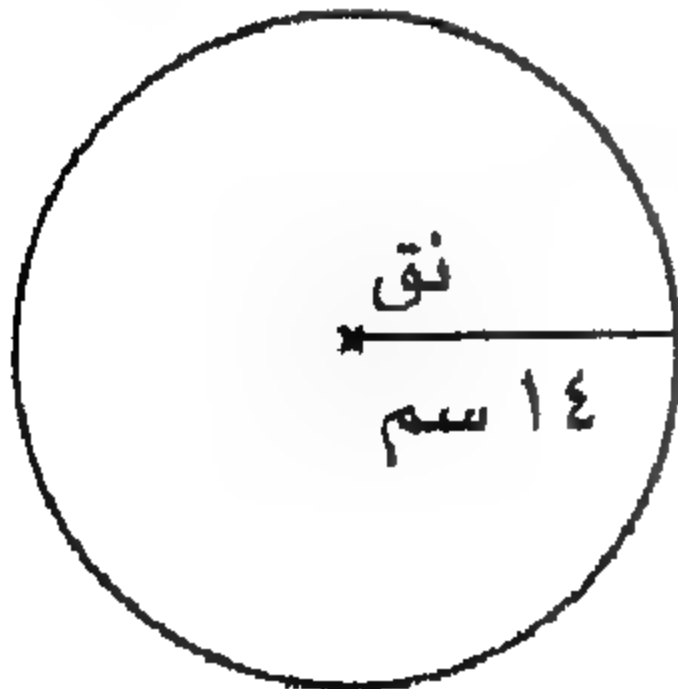
وأما بلغة المحل الهندسي هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء بحين يكون
بعدها عن أي نقطة ثانية تسمى المركز يساوي مقداراً ثانياً سمي نصف قطر الكرة.
والجدير بالذكر أن فيثاغورس (٥٧٢ - ٤٩٧) ق.م كان يرى - وهو محق بما كان
يرى - أن الكرة أكثر الأشكال جمالاً وتنبأ آنذاك بأن الأرض والشمس لابد أن
تكونا كرويتي الشكل بجمالهما الأخاذ حسب رأيه.



$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{نق}^3$$

$$\text{مساحة سطحها} = 4 \pi \text{نق}^2$$

مثال: ما حجم كرة نصف قطرها ١٤ سم وما مساحة سطحها اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$



$$\text{حجمها} = \frac{4}{3} \pi \text{نق}^3 = \left(\frac{22}{7}\right) (14)^3 \left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14 \times \frac{4}{3}$$

$$= 11498,666 \text{ سم}^3$$

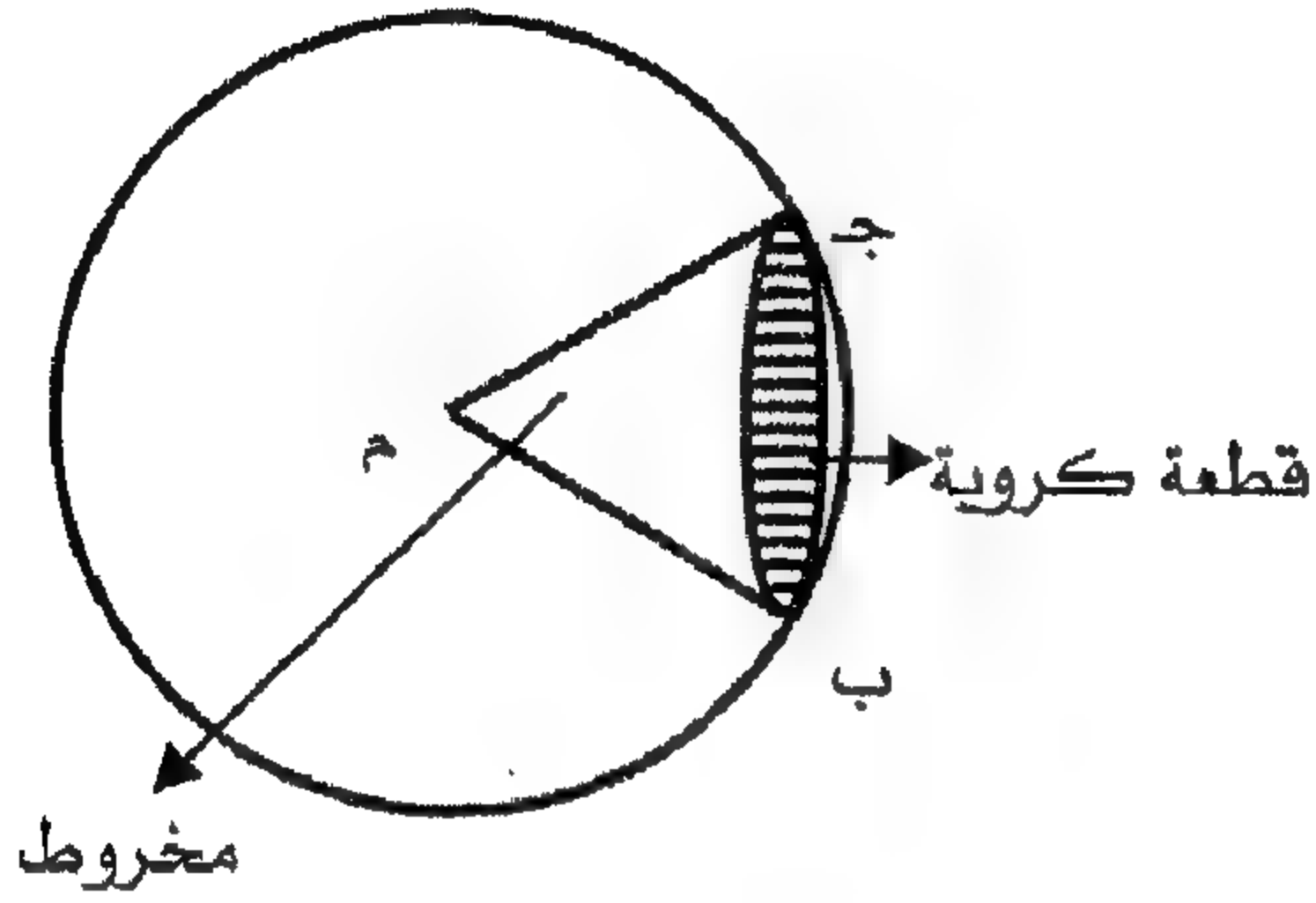
$$\text{مساحة سطحها} = 4 \pi \text{نق}^2 = \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 4 = 2464 \text{ سم}^2$$





■ وهناك القطاع الكروي Spherical Sector والقطعة الكروية Segment

والقطاع الكروي يرتبط بالكرة وينشأ من دوران قطاع دائري حول أحد نصف قطريه دورة كاملة في الفضاء كما في الشكل.



وهو مكون من مخروط وقطعة كروية كما في الشكل

حجم القطاع الكروي

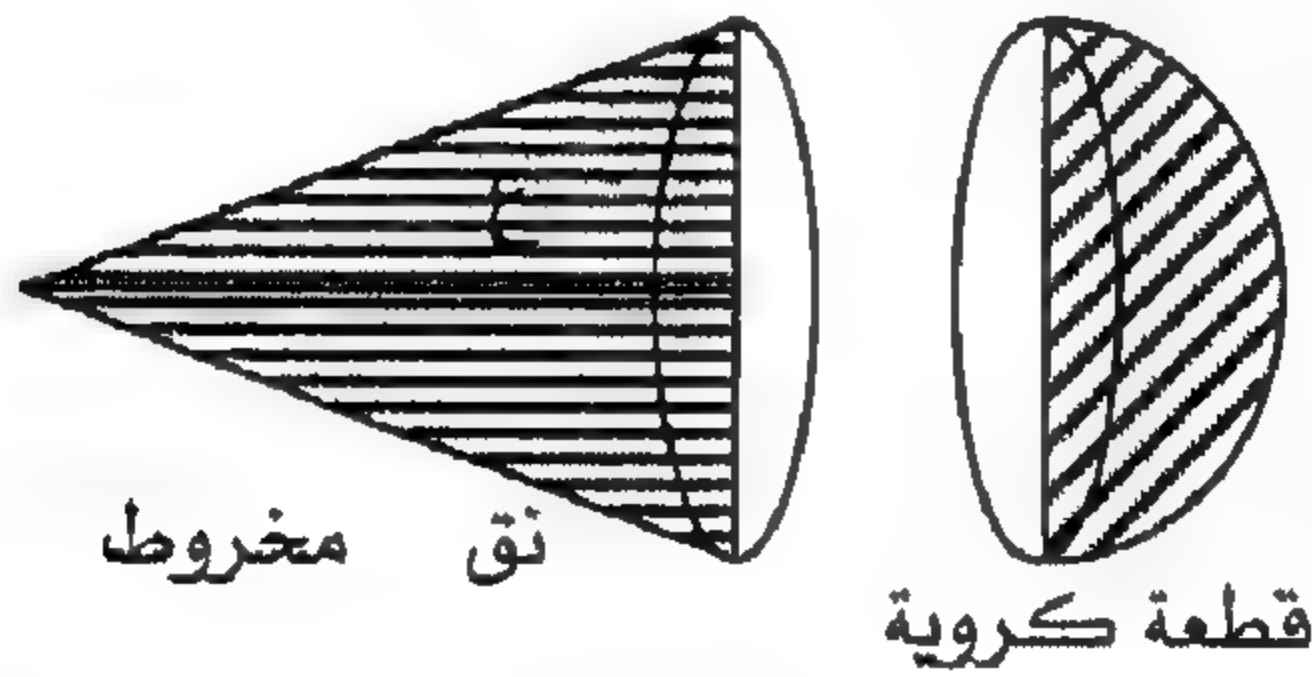
$$= \frac{2}{3} \pi \text{ نق}^2 \text{ ع}$$

حيث نق نصف قطر

دائره، ع ارتفاعه

$$\text{حجم القطعة الكروية} = \frac{1}{3} \pi \text{ ع}^2 (3 - \text{نق})$$

حيث ع ارتفاعها، نق نصف قطر كرتها.



⇐ مثال: كرة نصف قطرها ٥ سم أوجد

(١) حجم القطعة الكروية التي ارتفاعها ٧ سم

(٢) حجم القطاع الكروي الذي ارتفاعه ٣,٥ سم

$$\text{اعتبر } \pi = \frac{22}{7}$$

$$\text{الحل: حجم القطعة الكروية} = \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{22}{7} \right) (7)^2 (7 - 5 \times 3) = 154 \text{ سم}^3$$

$$\text{حجم القطاع الكروي} = \frac{2}{3} \left(\frac{22}{7} \right) (5)^2 (3,5) = 103,33 \text{ سم}^3$$



وهناك أيضاً مُعامل التغير:

إنه عدد حقيقي موجب مفاير للواحد الصحيح وبالرموز، معامل التغير Θ^* - {1} يرتبط بالكرة بالذات، عندما تُحول الكرة من حجم إلى آخر بالتصغير أو التكبير.

فإذا أردنا تصغير أو تكبير نصف قطر كرة فإن حجمها تبعاً لذلك يتغير، من هنا برز معنى مُعامل التغير هكذا:

عند مد نصف قطر كرة أو تقليصه من نق إلى أ نق حيث أ معامل التغير (تكبير أو تصغير) فإننا نلاحظ من الجدول التالي كيف يؤثر معامل التغير في حجم الكرة ومساحة سطحها:

طول نصف الكرة سم	حجم الكرة سم ^٣	مساحة سطح الكرة سم ^٢
نق	$\frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$	$4 \pi \text{ نق}^2$
أ نق	$(\frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3) (أ^3)$	$(4 \pi \text{ نق}^2) (أ^2)$

فكأن حجم الكرة بعد التغير قد ضرب بالمعامل $أ^3$ ← (معامل التغير)^٣
وكأن مساحة سطح الكرة بعد التغير قد ضرب بالمعامل $أ^2$ ← (معامل التغير)^٢

مثال: قطعة جليد على شكل كرة بالتحديد حجمها ٢٥٠٠٠ سم^٣ بدأت بالانصهار محافظة على شكلها الكروي، ما حجمها عندما يتقلص قطرها إلى $\frac{2}{5}$ قيمته الأصلية (عند بداية عملية الانصهار) الحل:

بما أن قطر الكرة تقلص إلى $\frac{2}{5}$ قيمته الأصلية، فإن نصف قطرها أيضاً يتقلص إلى $\frac{2}{5}$ قيمته الأصلية.



$$\therefore \text{معامل التغير} = \frac{2}{5}$$

حجم الكرة يُصبح مساوياً حجمها الأصلي \times (معامل التغير)^٣

$$= \left(\frac{2}{5} \right)^3 \times 25000$$

$$= \left(\frac{8}{125} \right) \times 25000 = 1600 \text{ سم}^3$$

«هذا المثال يوضح تأثير معامل التغير على الحجم» وأما تأثير معامل التغير

على المساحة فيوضحه المثال التالي:

⇐ مثال: ينتج مصنع ألعاب كراتٍ من البلاستيك قطر كل منها ٤٠ سم تم

- لظروف خاصة - تقليص القطر إلى $\frac{4}{5}$ القطر الأصلي.

كم يوفر المصنع في عملية التقليص هذه من المادة الخام عند صنع كل

كرة من الكرات؟

الحل:

بما أن القطر يتقلص إلى $\frac{4}{5}$ فإن نصف القطر أيضاً يتقلص إلى $\frac{4}{5}$

$$\therefore \text{مُعَامِلُ التَّغْيِيرِ} = \frac{4}{5}$$

مساحة سطح الكرة الأصلي = $4\pi r^2$

$$\text{علماً بأن نصف القطر} = \frac{40}{2} = 20 \text{ سم}$$

$$= 4\pi (20)^2 = 1600\pi \text{ سم}^2$$

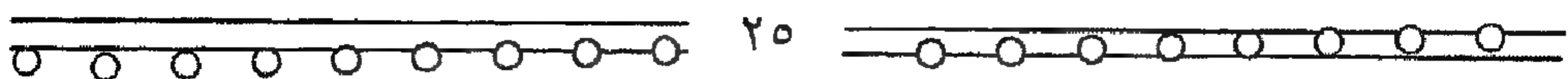
$$= \left(\frac{4}{5} \right)^2 \times 1600\pi$$

$$= \frac{16}{25} \times 1600\pi = 1024\pi \text{ سم}^2$$

\therefore كمية المادة المتوفرة عند صنع كل كرة

$$= 1600\pi - 1024\pi$$

$$= 576\pi \text{ سم}^2$$

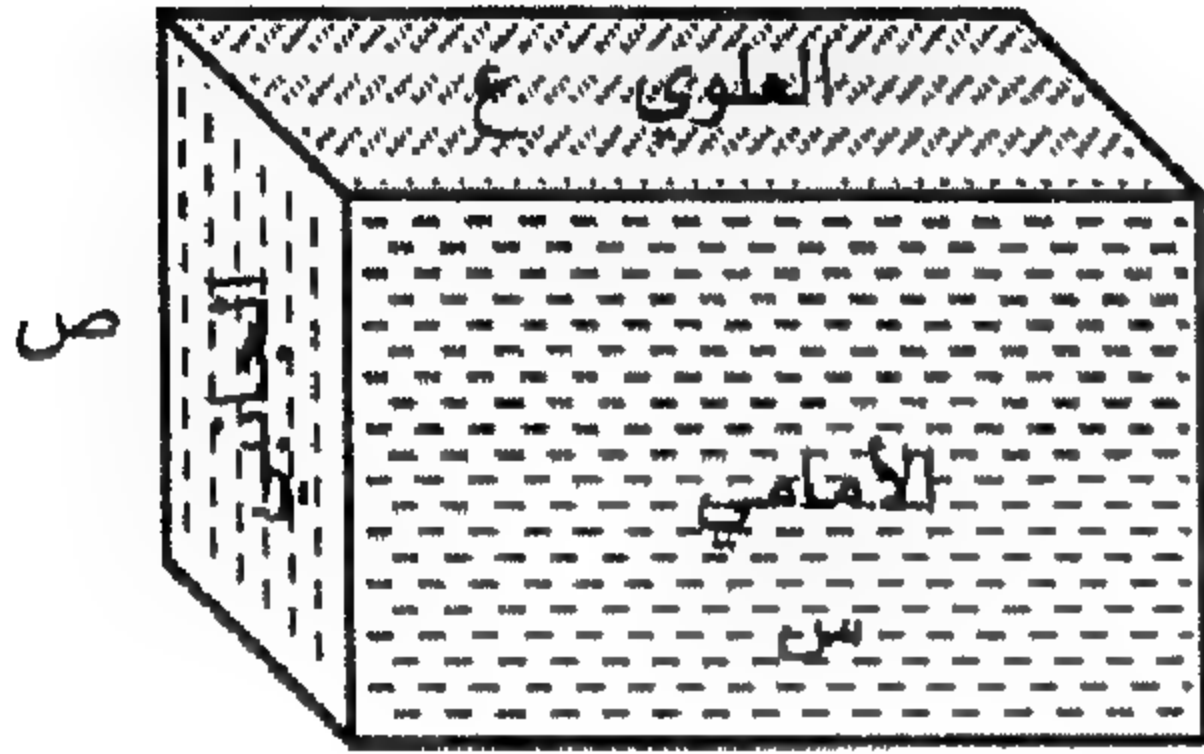




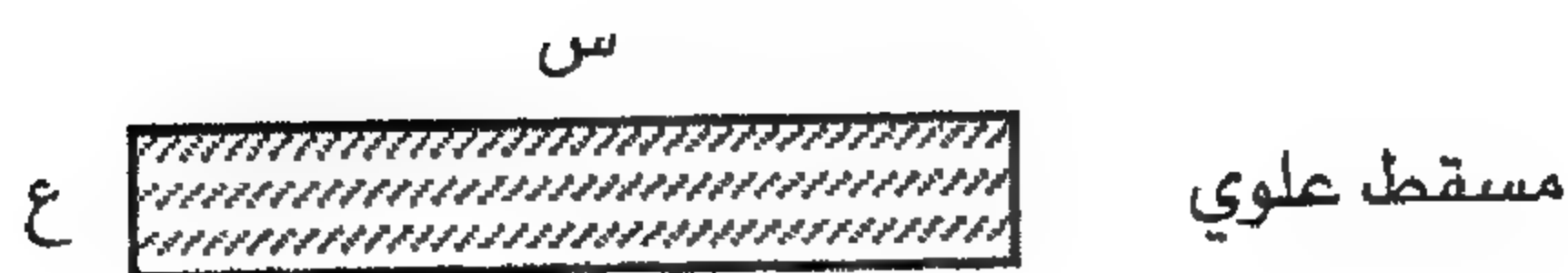
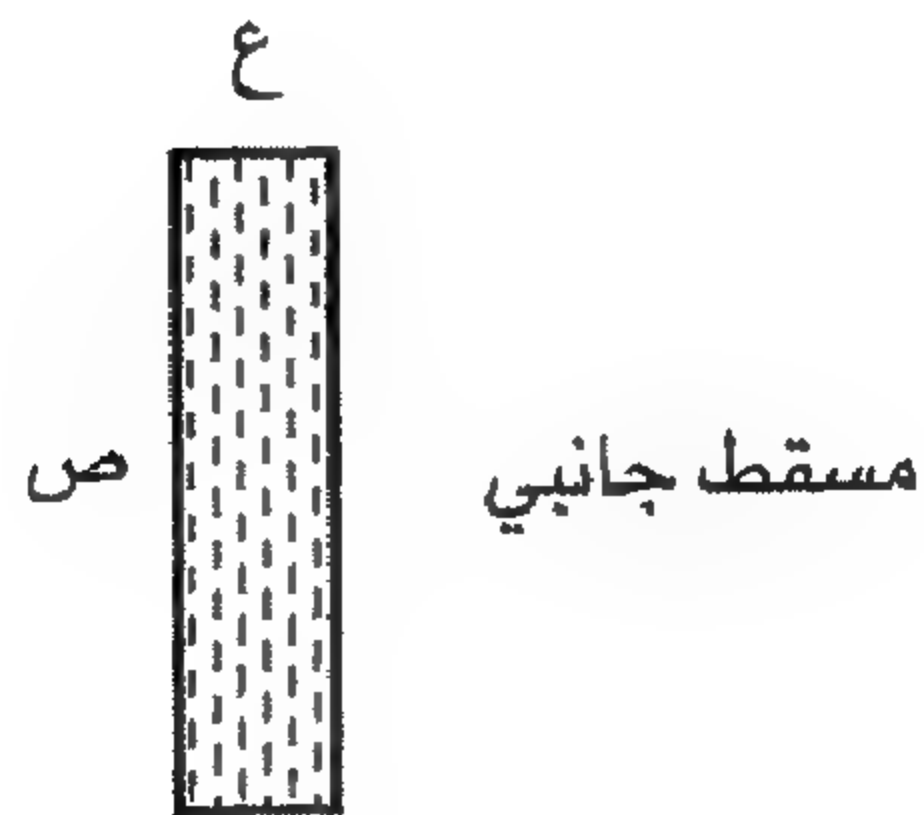
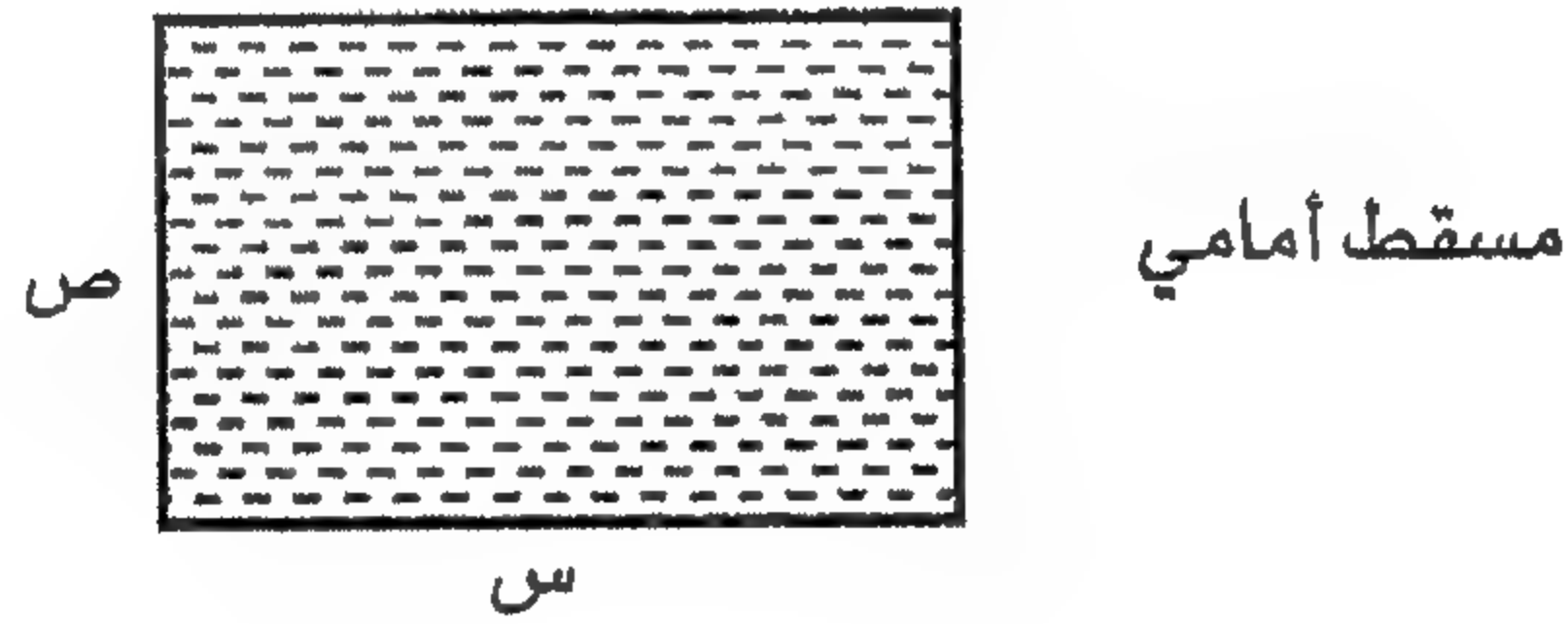
وأخيراً لا بُد مناقشة هذا المفهوم المرتبط بالمجسمات ارتباطاً وثيقاً، ألا وهو الإسقاط العمودي.

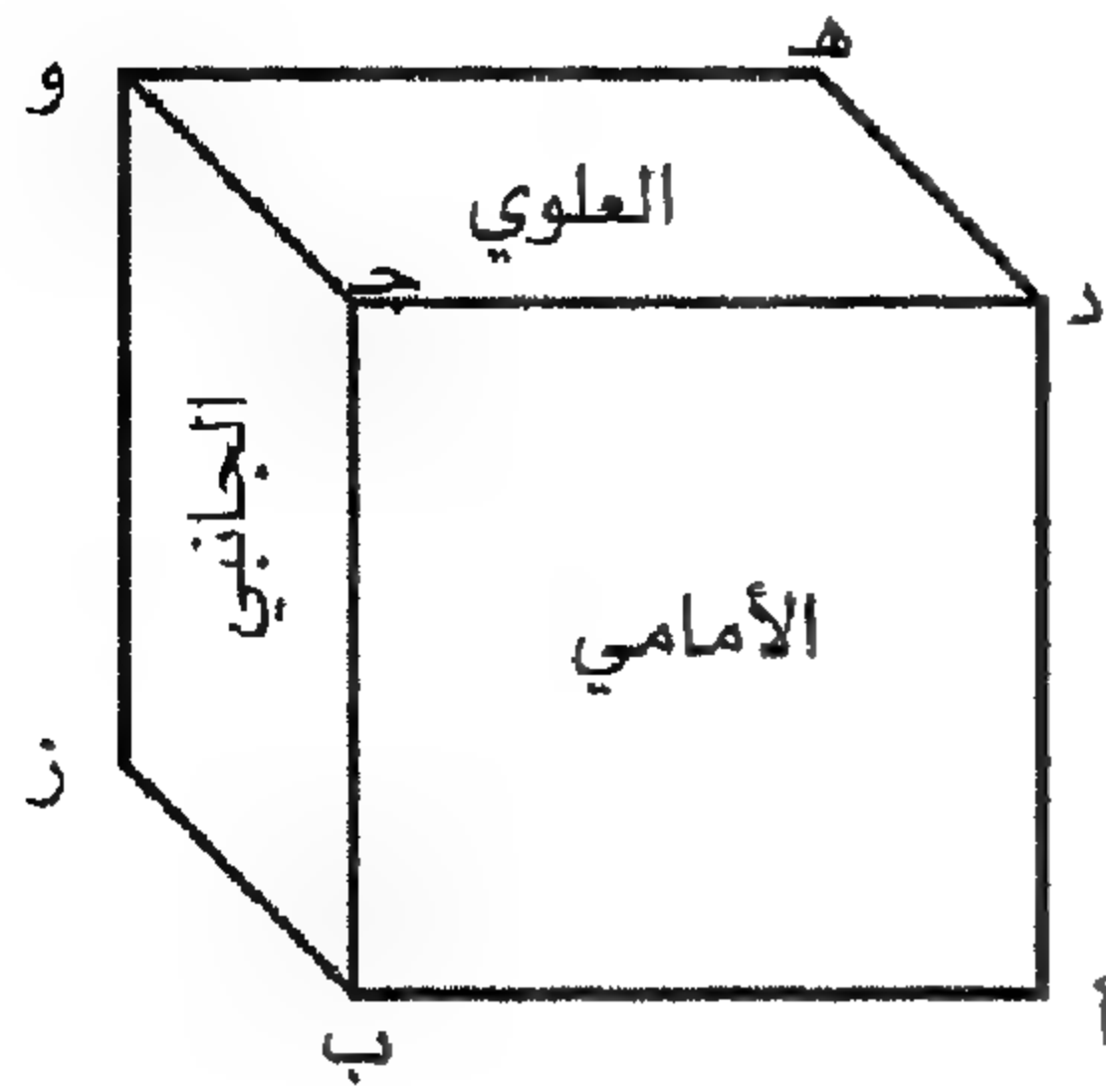
يُعتبر الإسقاط العمودي طريقة لرسم المجسمات الظاهر منها وغير الظاهر على السواء.

فمتوازي المستطيلات على سبيل المثال والذي أبعاده س، ص، ع فيظهر عند رسمه على الورق كما في الشكل.

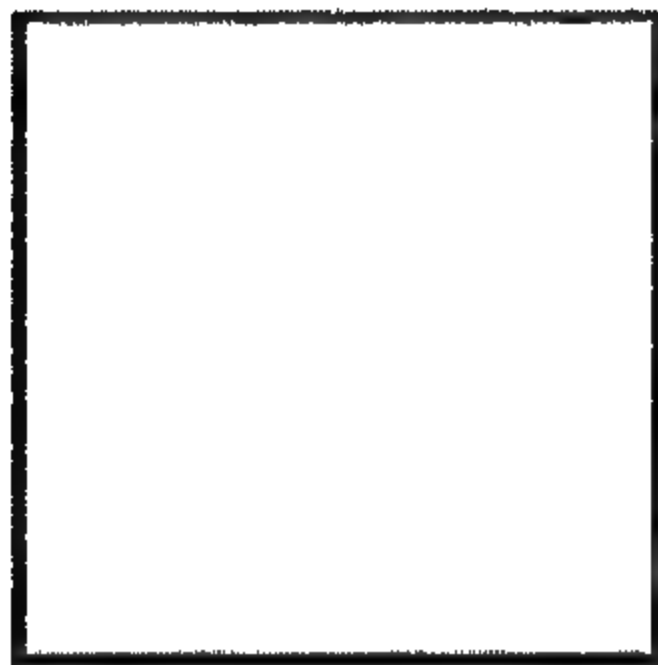


وأما مساقطه منفردة فتظهر مستطيلات وكما في الأشكال التالية:

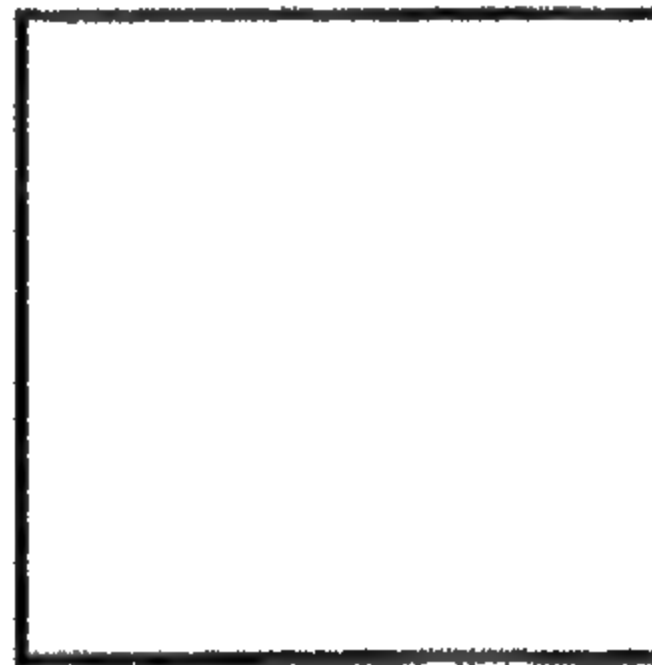




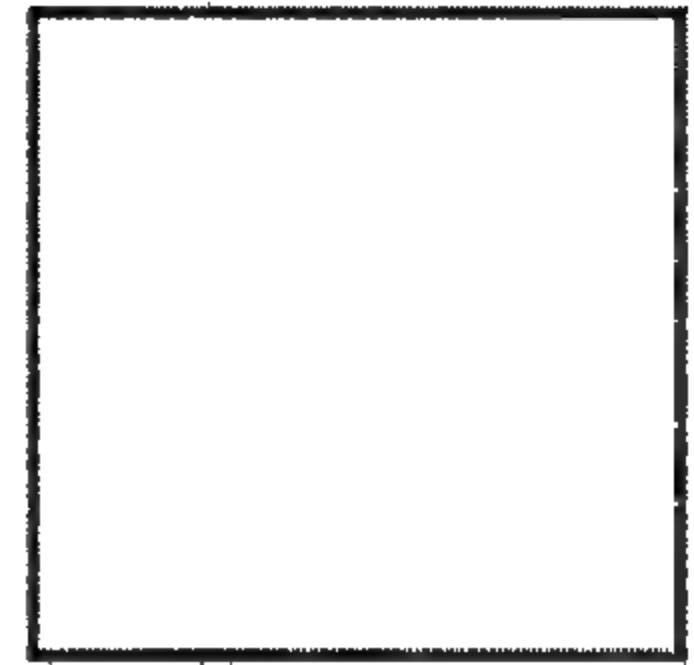
والمكعب عند رسمه على الورق يظهر على
الشكل أما مساقطه منفردة فتظهر
كمربعات وكما في الأشكال التالية:



مسقط علوي

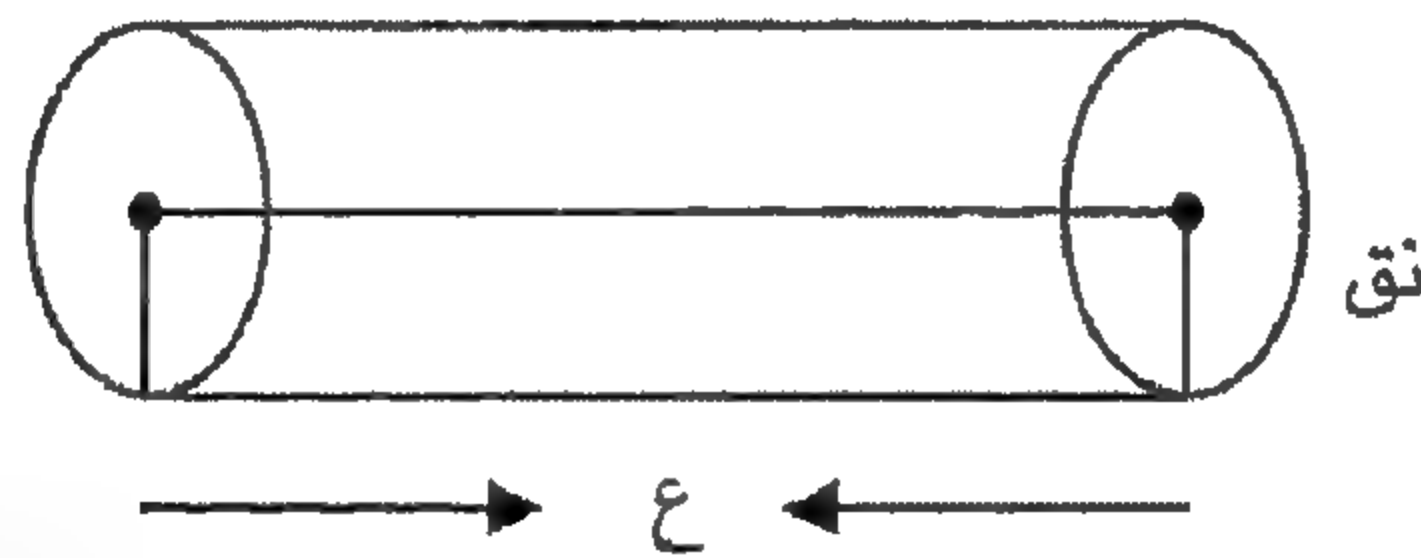


مسقط جانبي

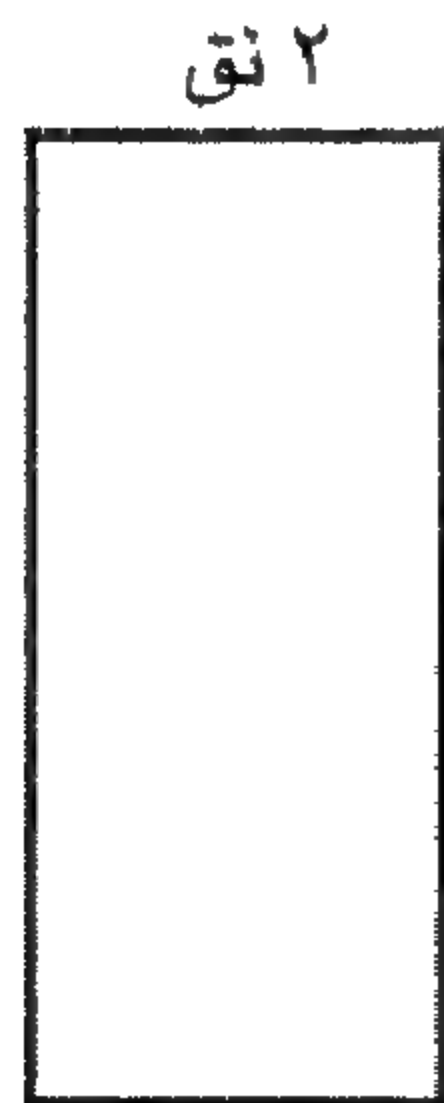


مسقط أمامي

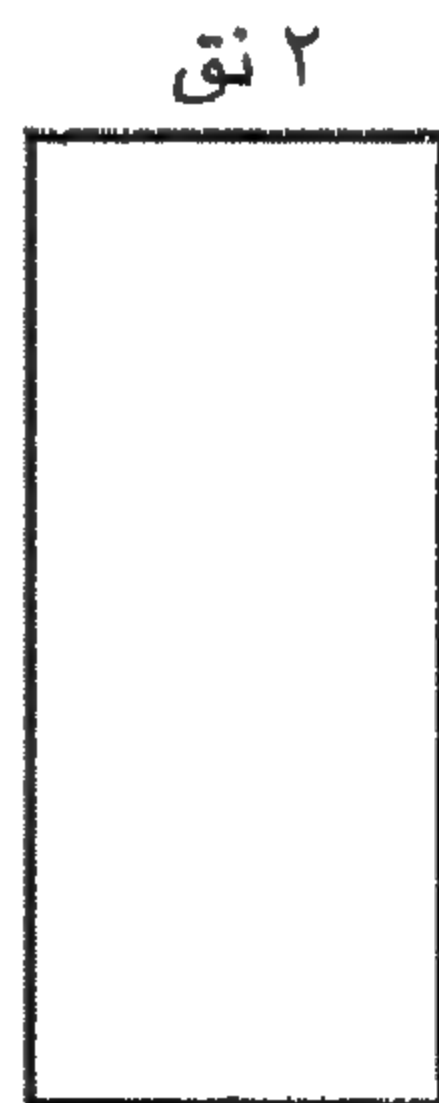
وأما الأسطوانة القائمة فتظهر عند رسمها على الورق كما في الشكل



ومساقطها تظهر كمستطيلات ودائرة كما في الأشكال:



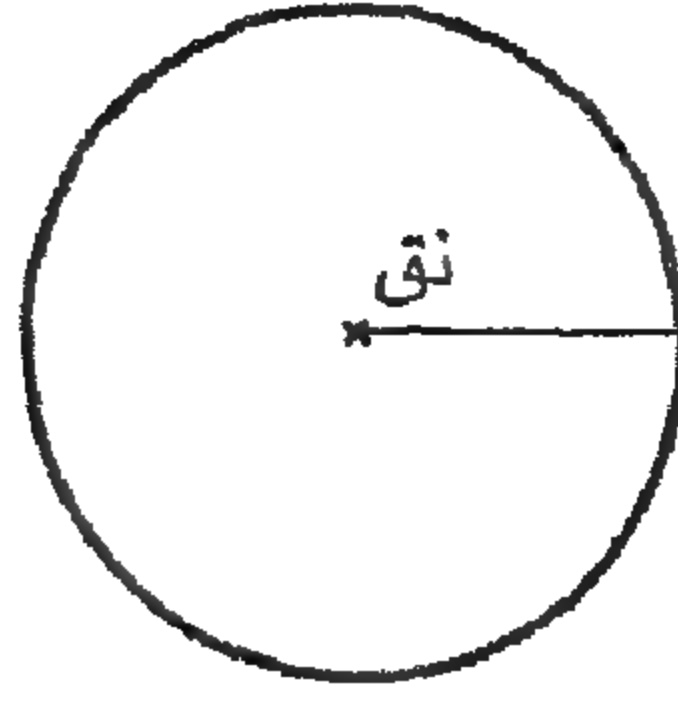
مسقط أمامي



مسقط جانبي

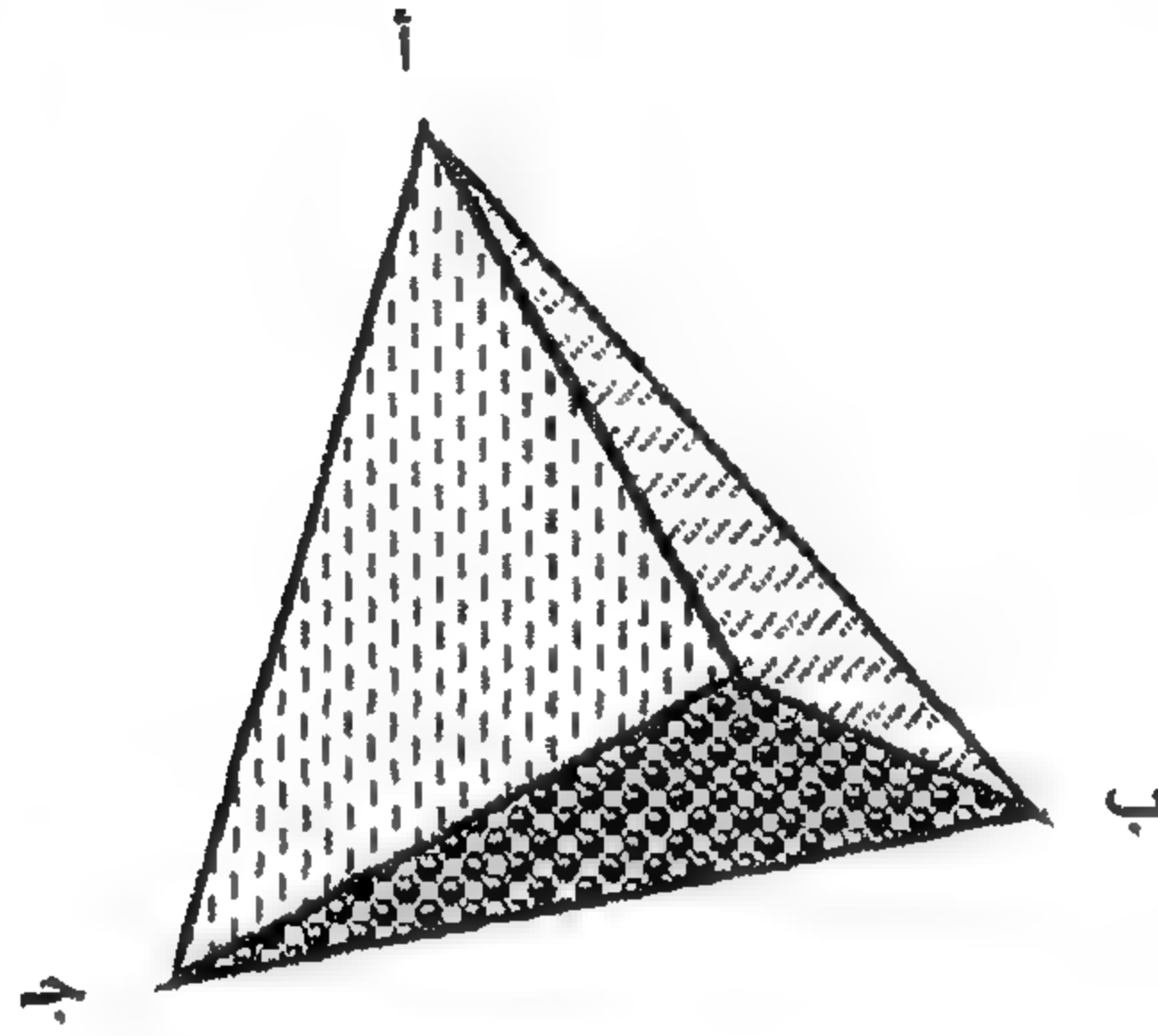
وكذلك





مسقط علوي للإسطوانة

وأخيراً الهرم يظهر عند رسمه على الورق كما في الشكل



«وبهذا القدر نكتفي»

كون موضوع الإسقاط العمودي بالذات هو من اختصاص الفنانين

والرسامين بشكل خاص!!!

تُبنى الهندسة الفضائية كسائر الهندسات الأخرى من مُسميات ومسلمات

ونظريات.

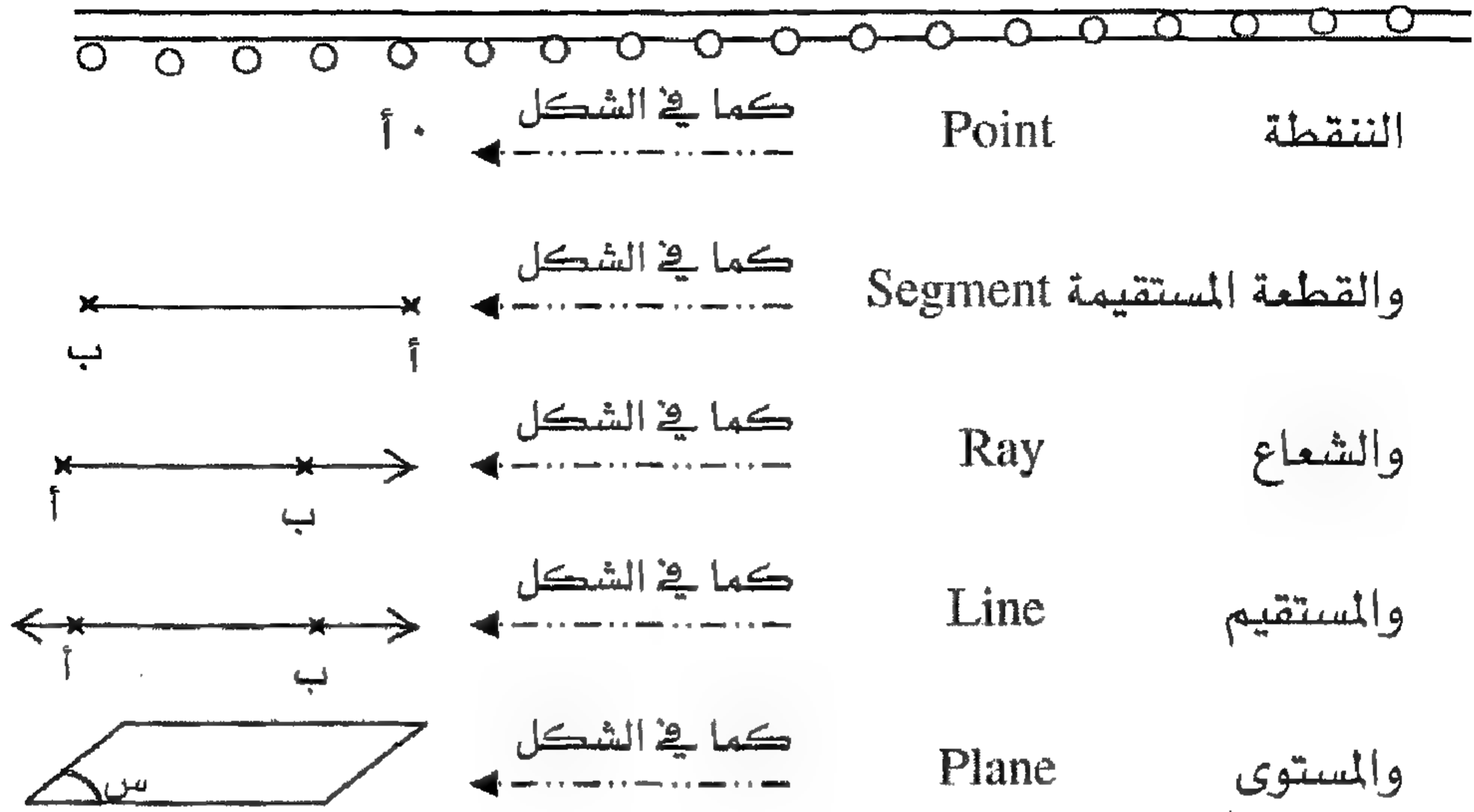
سنناقشها بإيجاز شديد:

Notions (١٤ - ٢) المسميات

إنها المفردات التي لا نعطيها تعريفات بل نفهمها كما يفهمها الآخرون بلا

مقدمات ولا تفسيرات كونها الأوليات في الرياضيات مثل:

الهندسة الفضائية



مع الملاحظة أنه مر نقاشها فيما سبق لذا لا فائدة من تكرار نقاشها هنا،
وتستخدم هذه المسميات كأساس لتعريف مفاهيم هندسية أخرى هي:

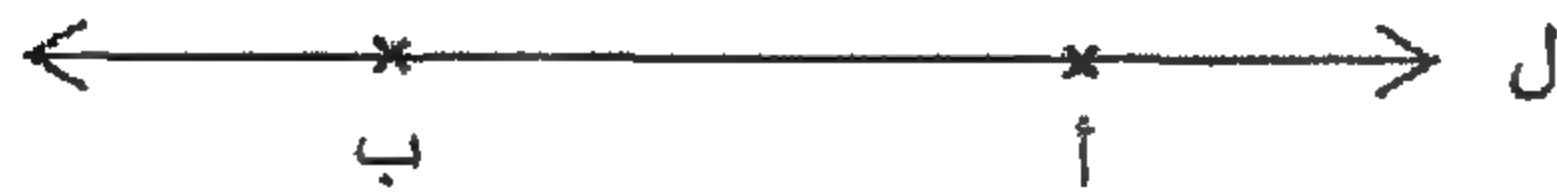
المسلمات (Axioms ١٤ - ٣)

إنها الحقائق التي يؤخذ بصحتها دون براهين أو إثباتات كونها البديهيات التي تعتمد على مفردات أولية لا تحتاج إلى تعريفات لأنها مُسميات أو أوليات كما مر أعلاه.

وكلمة مُسلمة تستخدم للدلالة على حقيقة هندسية تكون من البساطة بحيث يمكن افتراض صحتها دون إثبات مثل:

«مسلمة»

يمكن رسم مستقيم واحد وواحد فقط يمر بنقطتين معلومتين، والتوضيح كما في الشكل.



وهذا صحيح كون كل مستقيم آخر غير \vec{L} يمر بالنقطتين أ، ب لابد من أن ينطبق على المستقيم \vec{L} وكأنه هو نفسه.



وقديماً قال أرسطو (٣٨٤ - ٣٢١) ق.م

«كل علم» من العلوم يجب أن ينشأ أولاً من مبادئ غير مبرهنة، وإلا فإن خطوات البرهان سوف لا تنتهي إطلاقاً، وهذه المبادئ هي المسلمات.

وفي كتاب الأصول لافليدس (٣٢٥ - ٢٦٥) ق.م

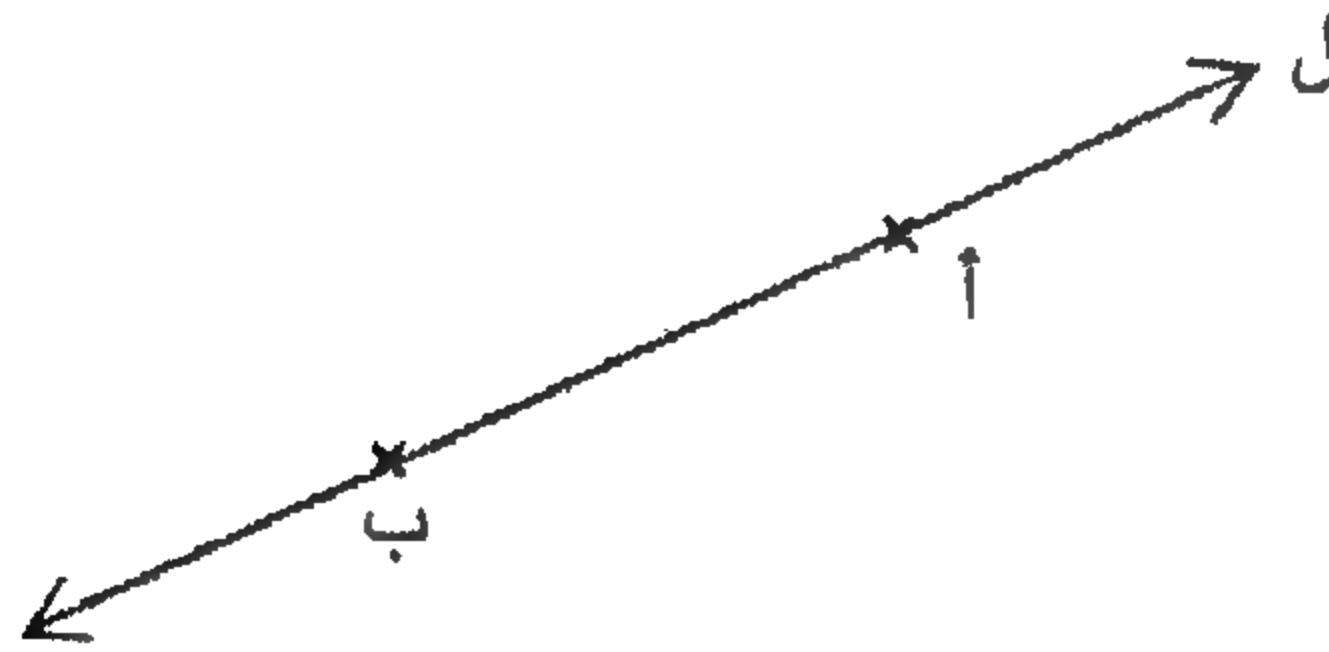
ورد ذكر المفاهيم العامة التي أطلق عليها اسم المسلمات لا مجال لذكرها هنا.

سنورد فيما يلي أهم مسلمات الهندسة الفضائية مع التوضيح بالرسم قدر الإمكان، علماً بأن الفضاء كمفهوم رياضي هو مجموعة غير منتهية من النقاط، يضم المستقيمت والمستويات والمجسمات مركز اهتمام الهندسة الفضائية:

مسلمة "١"

«أي نقطتين في الفضاء لا يمر بهما إلا مستقيم واحد فقط»

كما في الشكل:



مسلمة "٢"

«إذا تقاطع مستقيمان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، والمستقيمان المختلفان هما المستقيمان الواقعان في مستويين مختلفين».

لاحظ الشكل المجاور:





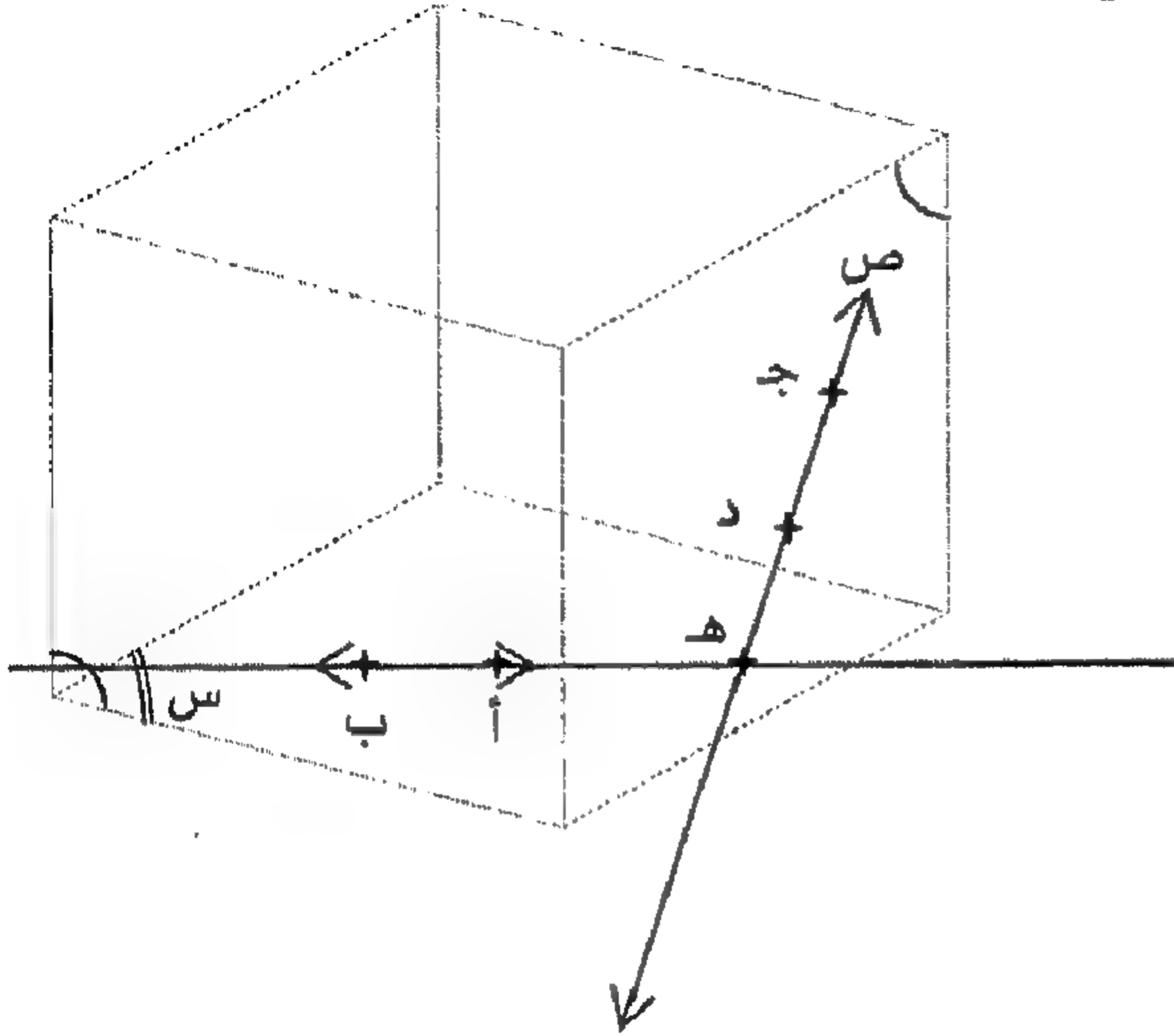
إن المستقيمين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـد}$ مختلفين

كون $\overleftrightarrow{أب}$ يقع في المستوى $س$

و: $\overleftrightarrow{جـد}$ يقع في المستوى $ص$

ويتقاطعان في النقطة $هـ$

أي أن $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـد} = هـ$



مسألة "٣"

«يوجد لأي ثلاث نقط لا تقع على استقامة واحدة مستوى واحد فقط

يحتويها»

لاحظ الشكل المجاور

النقط $أ$ ، $ب$ ، $جـ$ غير

مستقيمة كونها لا تقع على

مستقيم واحد ، لذا فإنه يحتويها

المستوى $س$.

بينما النقط $أ$ ، $د$ ، $هـ$

نقط مستقيمة كونها تقع على

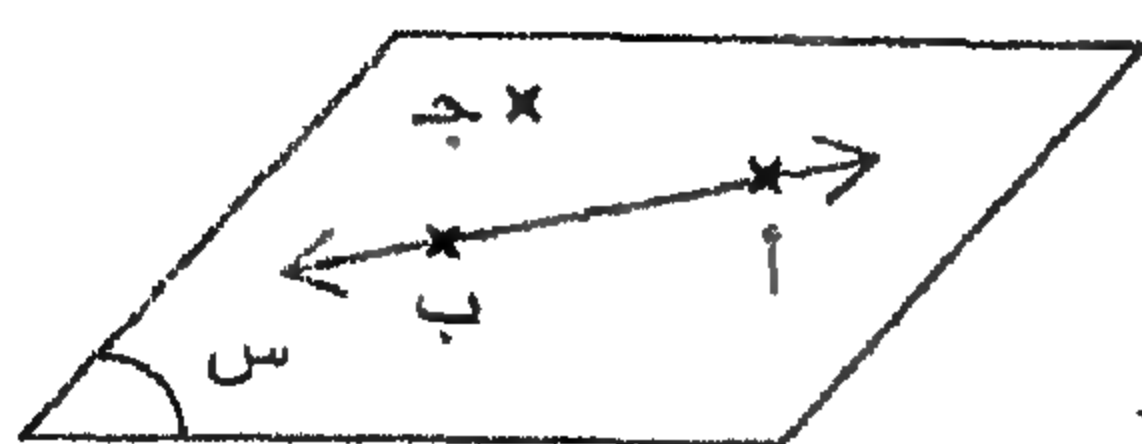
المستقيم $\overleftrightarrow{أهـ}$ فلا يحتويها واحد فقط لأنها تقع في المستوى $أ جـ هـ$ والمستوى $أ ب هـ$

معاً.



واعتماداً على هذه المسلمة بالذات فإن المستوى يتعين بإحدى حالات ثلاث

هي:

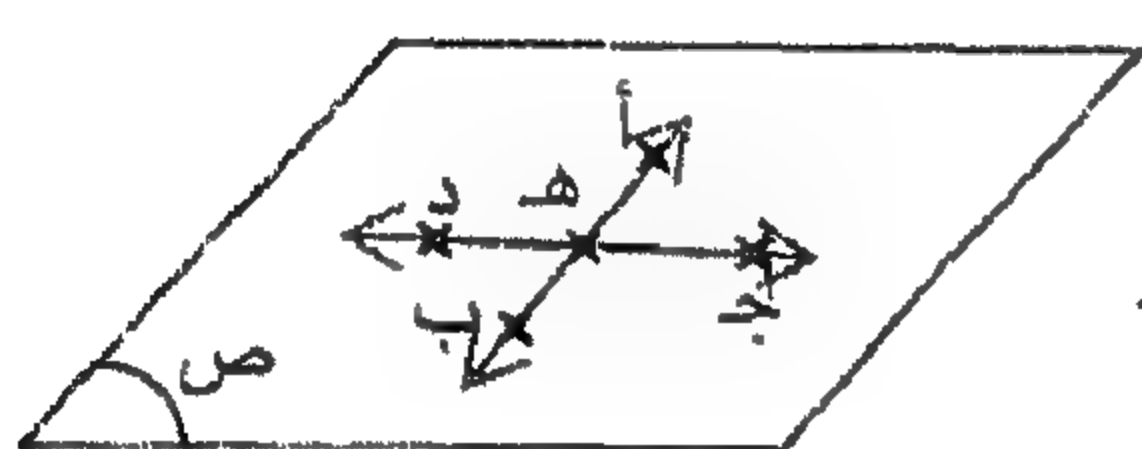


الحالة الأولى: مستقيم ونقطة خارجه كما في

الشكل

كون النقط أ، ب، ج ثلاث نقط غير مستقيمة (المسلمة) لذا فإنها

تعين المستوى ص.



الحالة الثانية: مستقيم ونقطة خارجه كما في

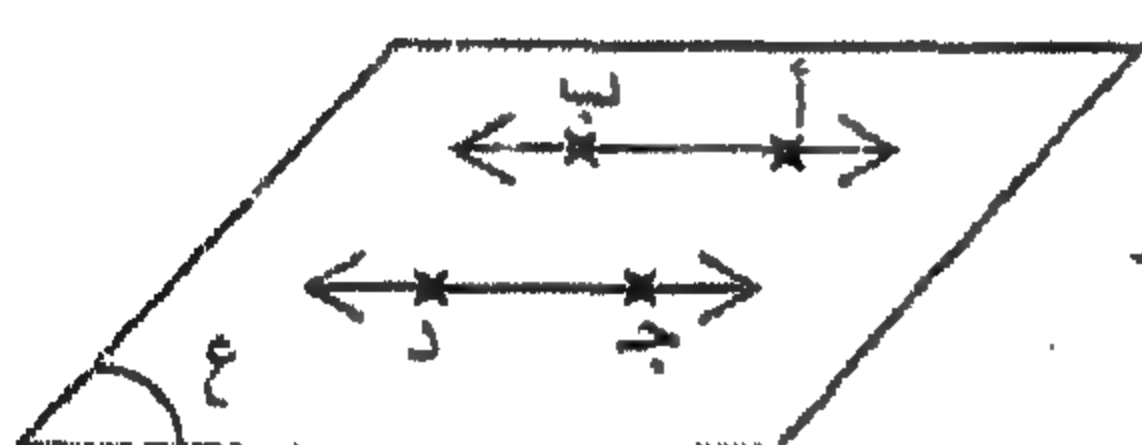
الشكل

حيث النقط أ، هـ، د غير

مستقيمة (المسلمة) لذا فإنها تعين المستوى ص.

وكذلك النقط د، هـ، ب غير مستقيمة (المسلمة) لذا فإنها تعين

المستوى ص نفسه.



الحالة الثالثة: مستقيمين متوازيين كما في

الشكل

حيث أ، ب، ج ثلاث نقط غير

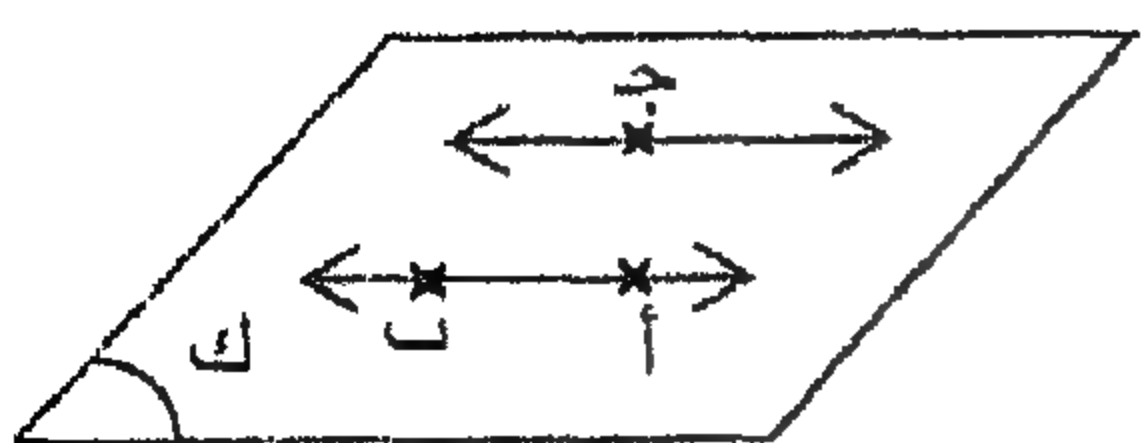
مستقيمة (المسلمة) لذا فإنها تعين المستوى ع.

وكذلك النقط ج، د، أ وكذلك النقط أ، د، ب وهكذا.

«فكل من الحالات تقرر ثلاث نقط غير مستقيمة لذا فإنها تعين مستوى

وحيد في الفضاء»

مسلمة "4"



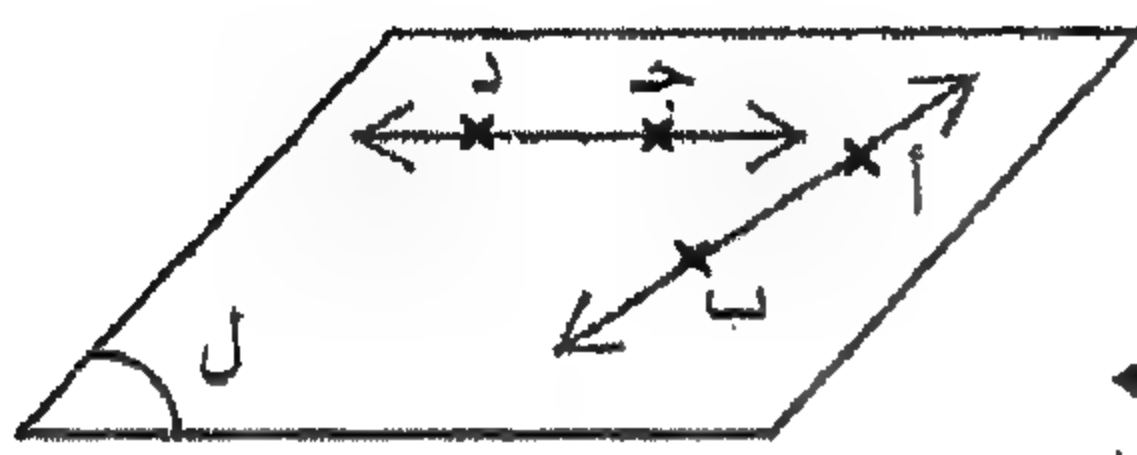
«من خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم

وحيد يوازيه» كما في الشكل.



كون المستوى يحتوي النقط الثلاث أ ، ب ، ج والمستوى لا بداية له ولا نهاية
مثل المستقيم بالضبط.

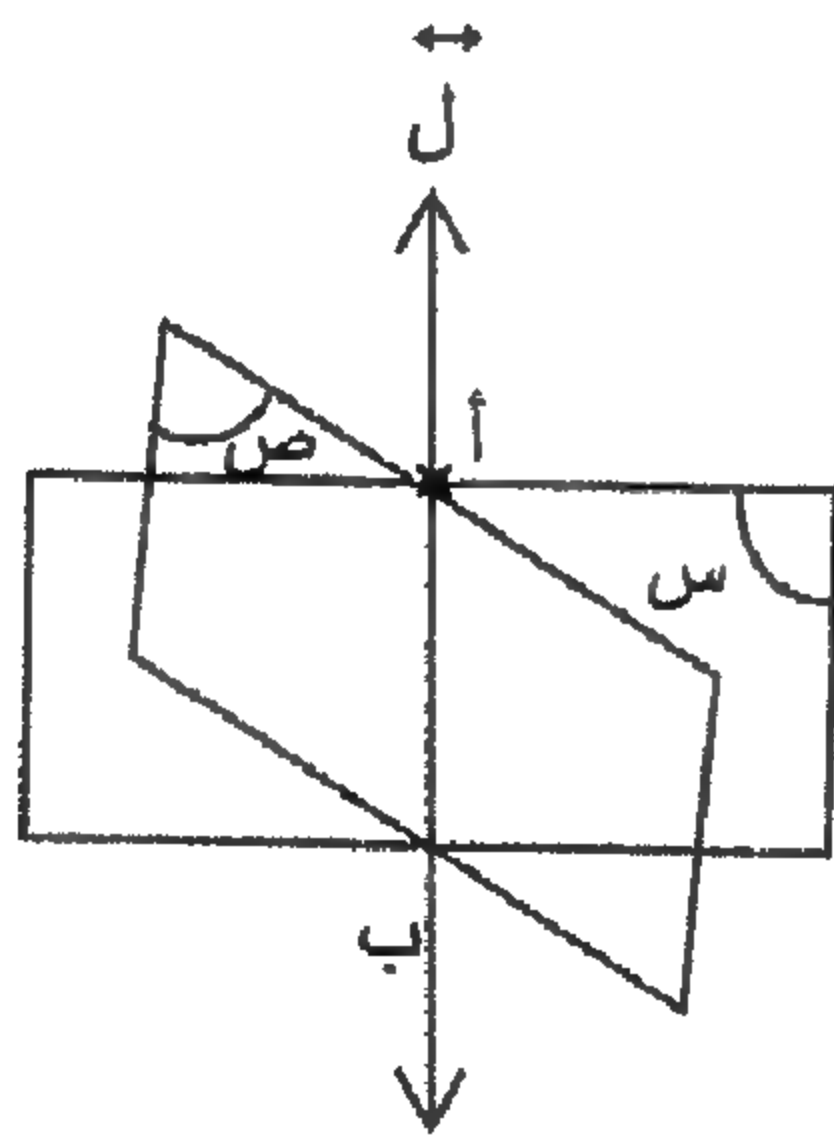
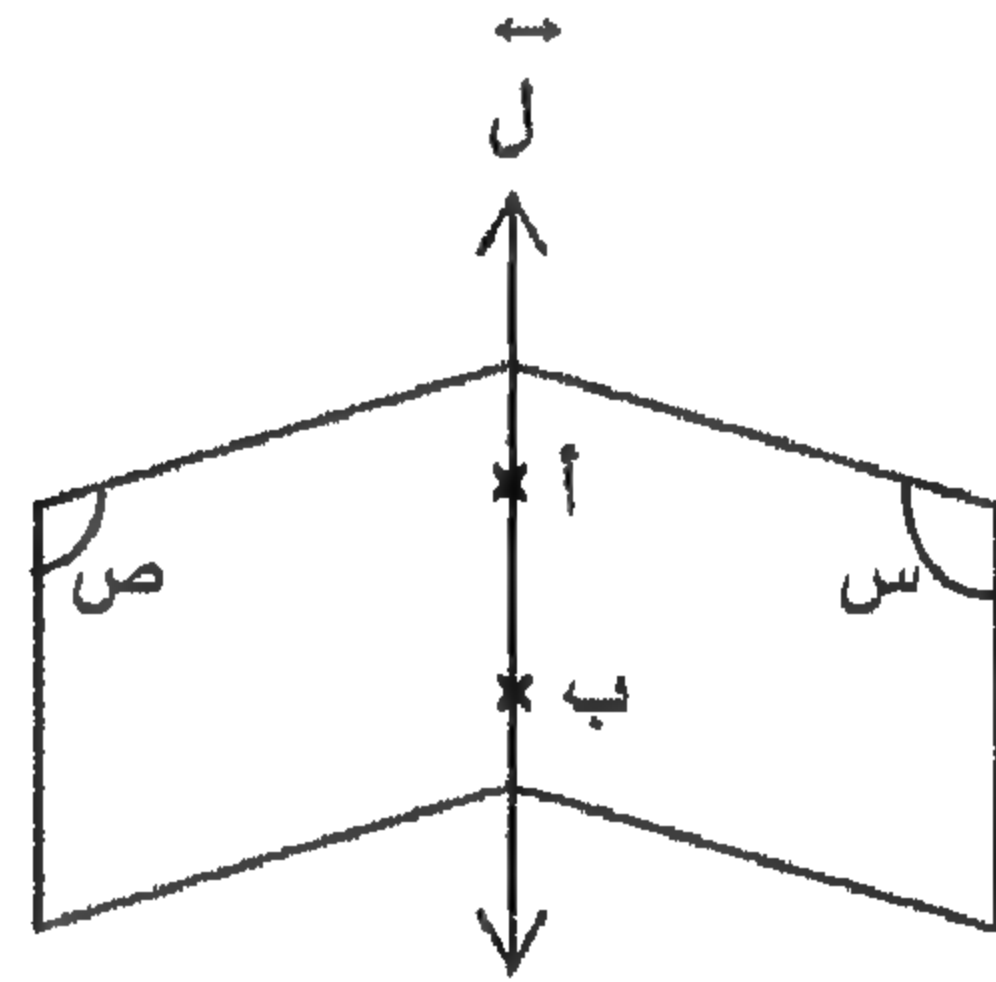
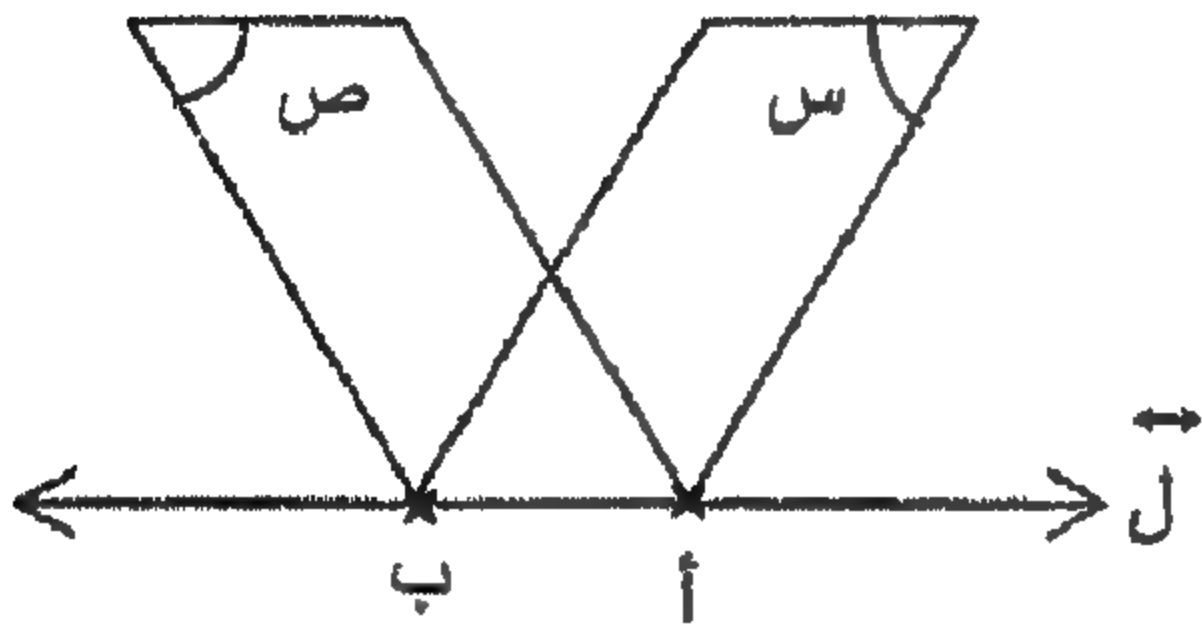
مسألة "٥"



«إذا وضعت نقطتان في مستوى، فإن
المستقيم الذي يحويهما يقع في المستوى نفسه»
فالمستوى ل يحوي المستقيمين أ هـ ، ج د

مسألة "٦"

«إذا تقاطع مستويان مختلفان فإن تقاطعهما مستقيم كما في الأشكال:



فالمستقيم أ ب هو مستقيم مشترك بين المستويين س ، ص كونه خط

تقاطع المستويين.

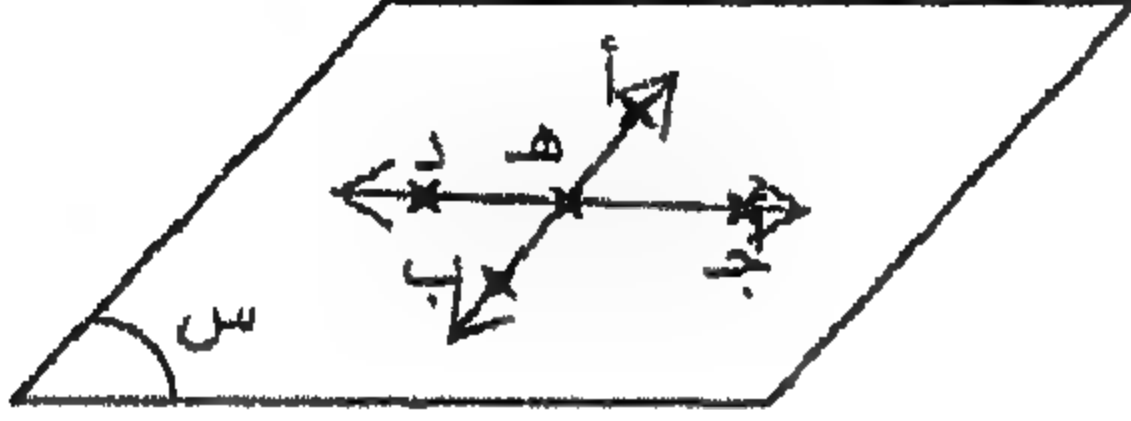


أولاً: العلاقة بين المستقيمات في الفضاء

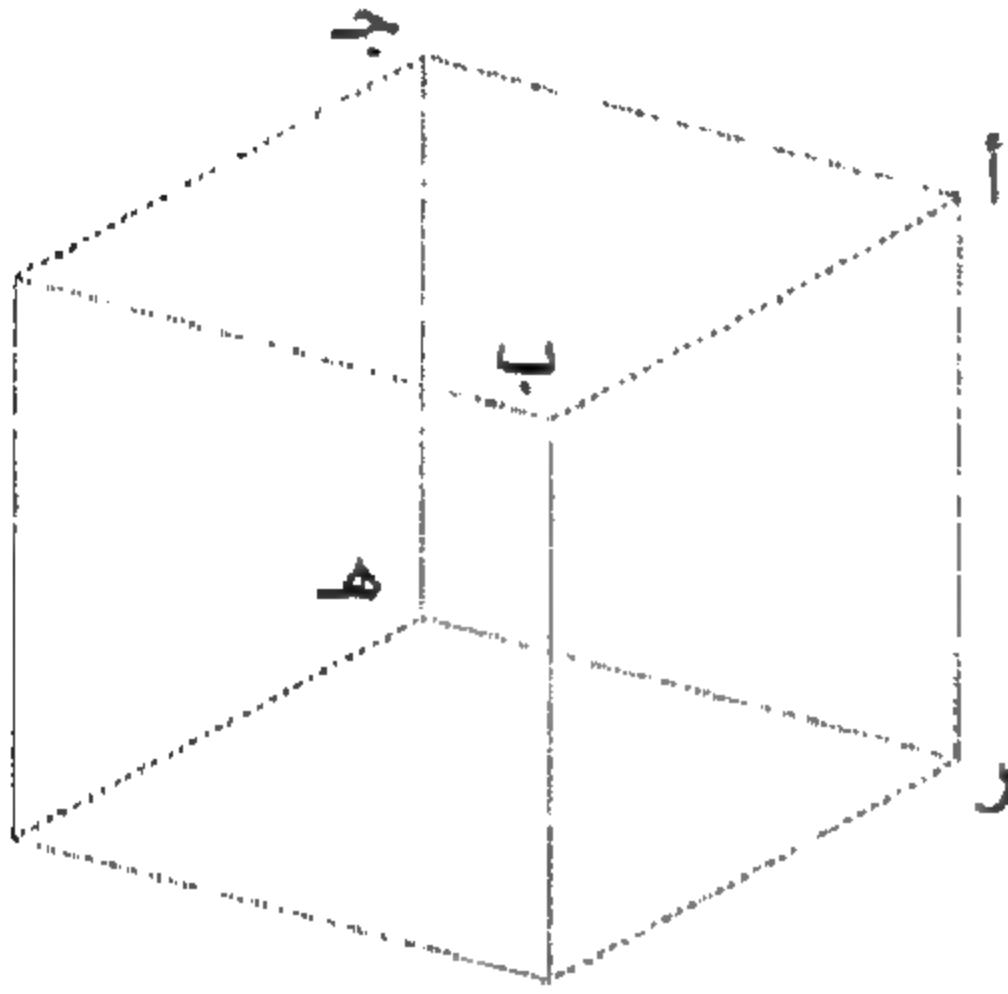
(١) المستقيمان المتقاطعان:

هما المستقيمان الواقعان في مستوى واحد والمتركان في نقطة واحدة فقط

كما في الشكل.



أب ، جـ د يتقاطعان بالنقطة هـ



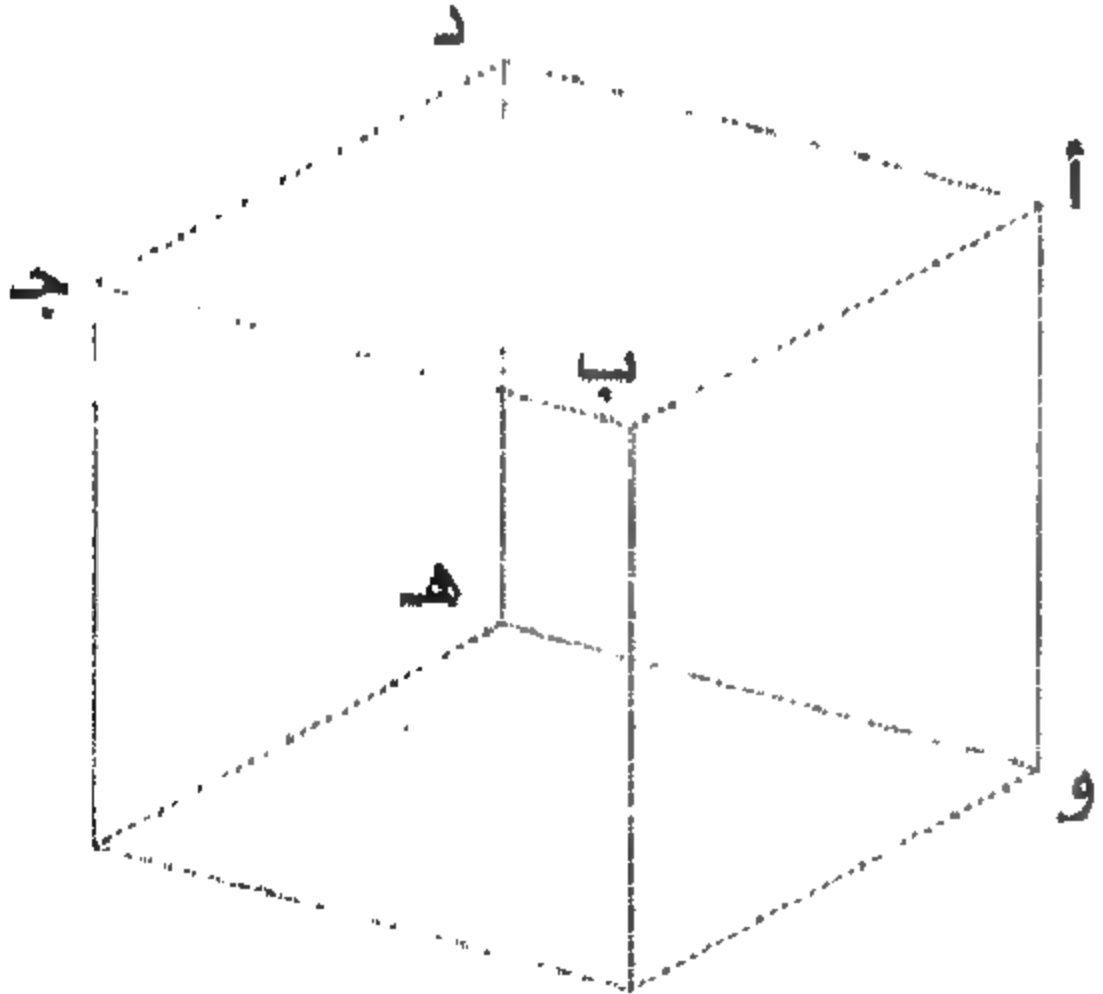
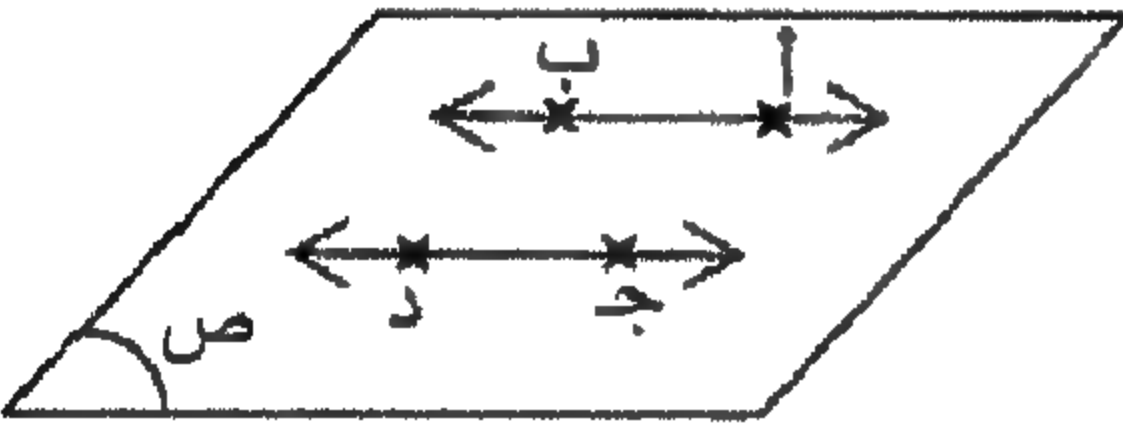
والشكل أب ، أجـ

وكذلك هـ جـ ، هـ ر

(٢) المستقيمان المتوازيان

هما المستقيمان الواقعان في مستوى واحد

وغير متقاطعين كما في الشكل



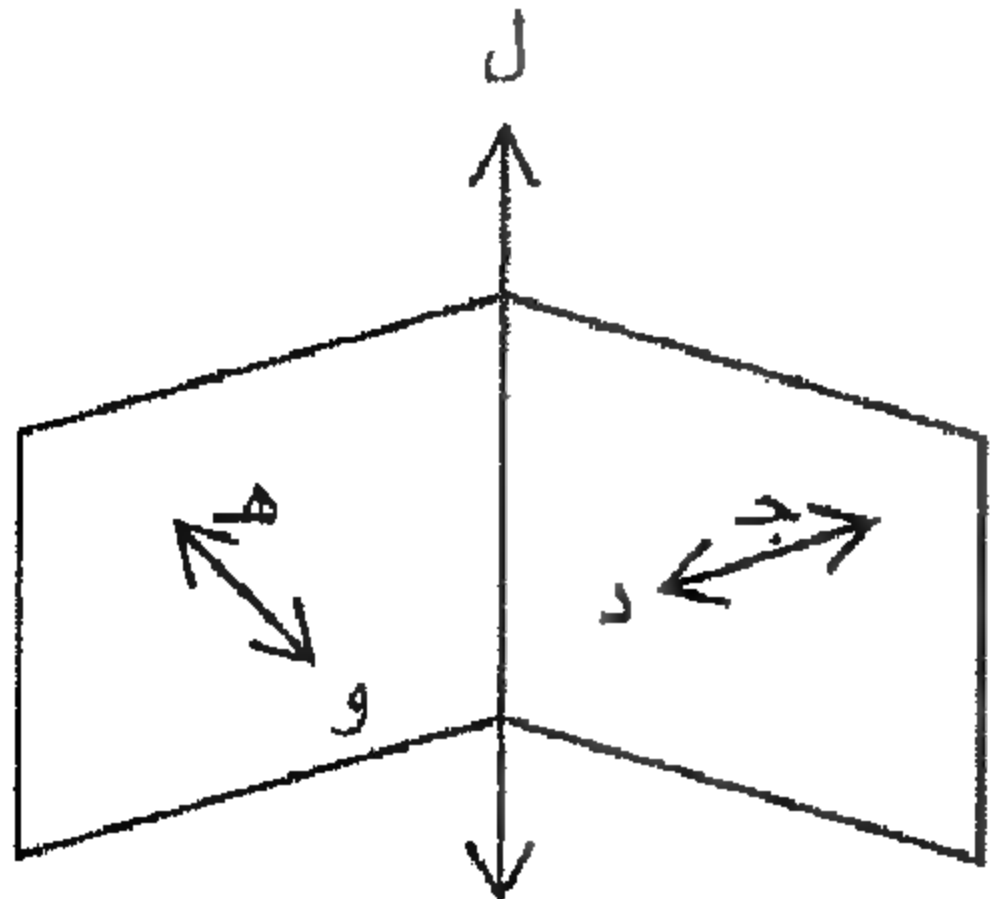
والشكل أـ د ، بـ جـ

وكذلك أـ و ، دـ هـ

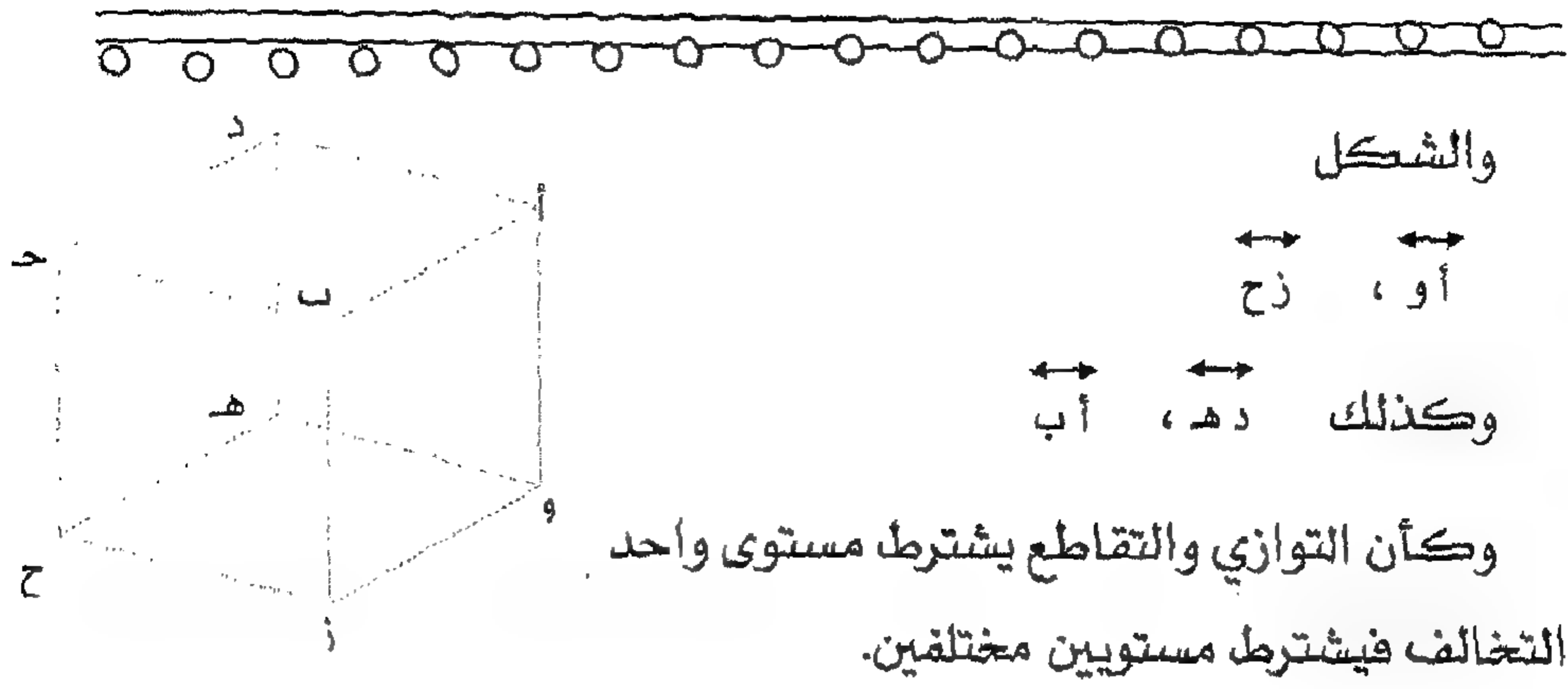
(٣) المستقيمان المتخالفان

هما المستقيمان غير المتوازيين وغير المتقاطعين

ولا يحويهما مستوى واحد كما في الشكل



جـ د ، هـ و



فالمستقيمان المتخالفان لا يمكن أن يحويهما مستوى واحد على الإطلاق.

مع ملاحظة أن القطعتين المستقيمتين $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ج د}$ تتبعان المستقيمين $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ج د}$ حيث $\overleftrightarrow{أ ب} \exists \overleftrightarrow{ج د}$ (كون $\overleftrightarrow{أ ب}$ جزء من $\overleftrightarrow{ج د}$)

وكذلك $\overleftrightarrow{ج د} \exists \overleftrightarrow{أ ب}$ (كون $\overleftrightarrow{ج د}$ جزء من $\overleftrightarrow{أ ب}$)

فإذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ج د}$ متوازيين

فالقطعتين المستقيمتين $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ج د}$ متوازيين أيضاً

وإذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ج د}$ متقاطعين

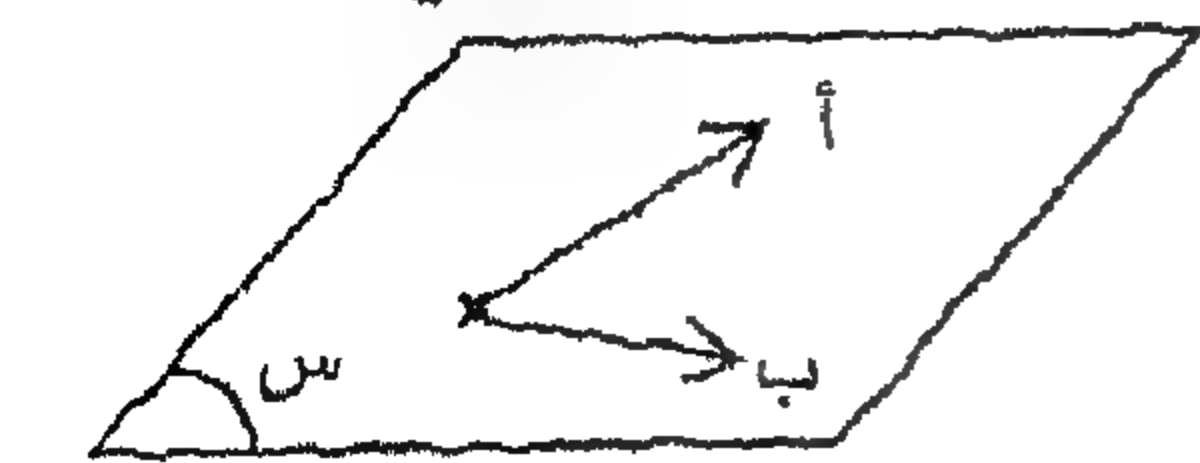
فالقطعتين المستقيمتين $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ج د}$ متقاطعتين أيضاً

ثم إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ج د}$ متخالفين

فالقطعتين المستقيمتين $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ج د}$ متخالفتين أيضاً

(٤) الزاوية بين المستقيمين المتخالفين

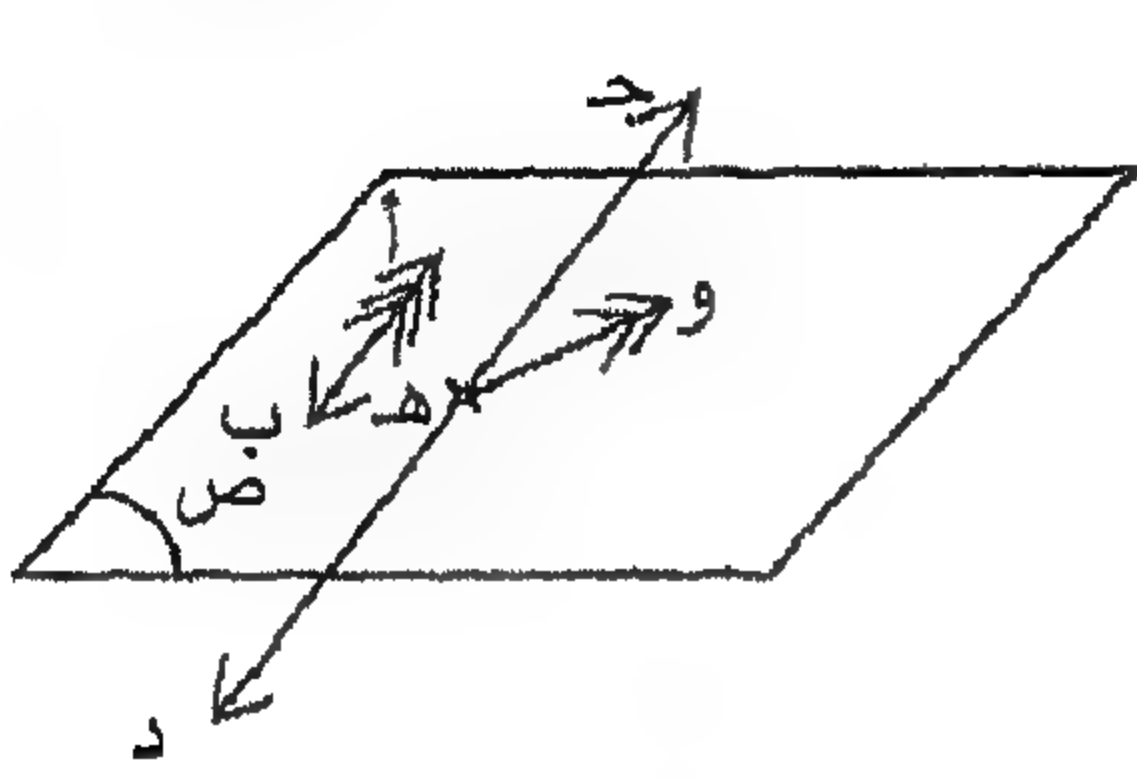
بما أن الزاوية شعاعان ينطلقان من نقطة واحدة هي الرأس في المستوى الواحد كما في الشكل $\angle أ و ب$





وهذه الزاوية ترتبط بالمستقيمين المتقاطعين.

وأما الزاوية بين مستقيمين متخالفين فتتحدد كما في الشكل



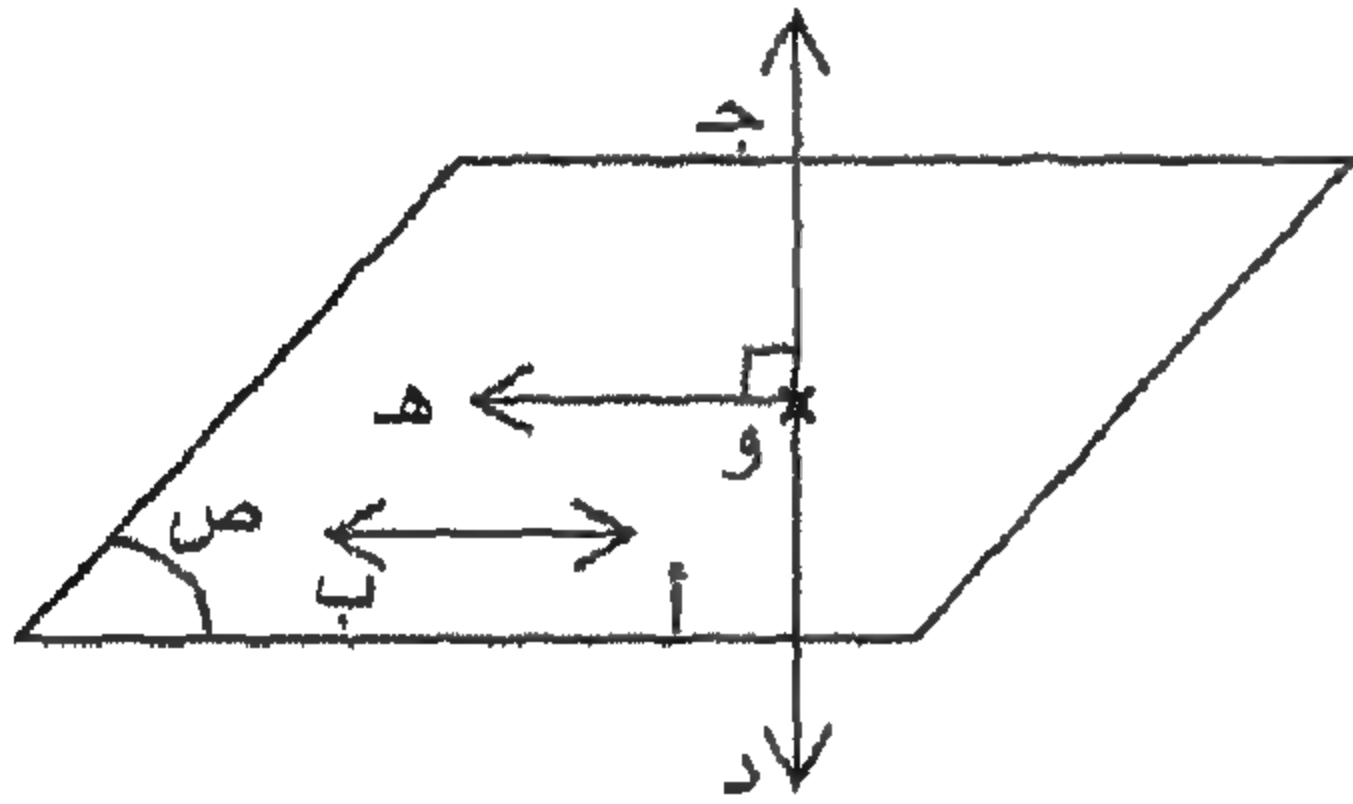
ج د \leftrightarrow يقطع المستوى ص بالنقطة هـ
(وهو في مستوى آخر غير ص)

أ ب \leftrightarrow يقطع المستوى ص بالنقطة هـ
(وهو في مستوى آخر غير ص)

المستقيم هـ و \leftrightarrow // ب أ \leftrightarrow وفي المستوى ص نفسه فتكون الزاوية الحادة \angle ج هـ و الناتجة عن تقاطع ج د \leftrightarrow هـ و \leftrightarrow هي الزاوية بين المستقيمين المتخالفين ب أ \leftrightarrow ج د \leftrightarrow

(٥) المستقيمان المتخالفان المتعامدان:

يقال المستقيمين متخالفين إنهما متعامدين إذا كانت الزاوية بينهما قائمة كما في الشكل.



المستقيم ج د يقطع المستوى ص
في النقطة هـ (وهو في مستوى آخر
غيرها)

والمستقيم أ د يقع على المستوى ص

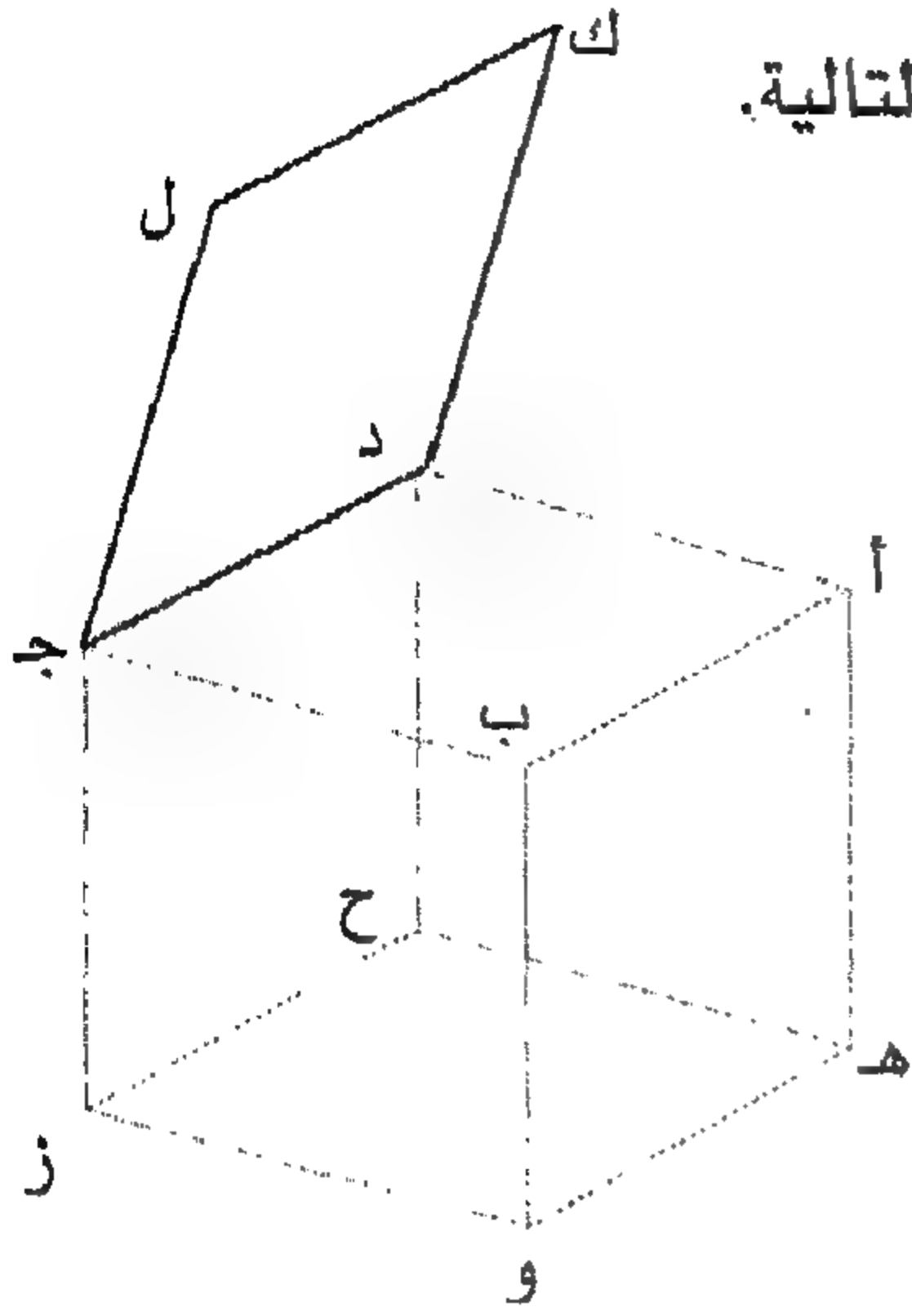
فالمستقيمان ج د \leftrightarrow ، أ ب \leftrightarrow متخالفان كون أحدهما أ ب \leftrightarrow يقع في المستوى ص والآخر لا.

نرسم من مستقيماً يوازي أ ب \leftrightarrow هو هـ و \leftrightarrow

فتكون الزاوية \angle أ و هـ بين المستقيمين، وكونها قائمة
فالمستقيمان ج د \leftrightarrow ، أ ب \leftrightarrow متعامدان.



مثال: الشكل المجاور يمثل صندوقاً (متوازي مستطيلات) مرفوع الغطاء، أعط مثلاً واحداً على كل حالة من الحالات التالية.



(١) ثلاثة أزواج من ال مستقيمت المتوازية

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{أد} // \overleftrightarrow{بج}, \overleftrightarrow{هو} // \overleftrightarrow{حز} \\ \overleftrightarrow{دح} // \overleftrightarrow{جز} \end{aligned}$$

(٢) ثلاثة أزواج من المستقيمت المتقاطعة

$$\begin{aligned} (\overleftrightarrow{أب}, \overleftrightarrow{بج}), (\overleftrightarrow{بج}, \overleftrightarrow{جد}), \\ (\overleftrightarrow{دح}, \overleftrightarrow{دا}) \end{aligned}$$

(٣) ثلاثة أزواج من المستقيمت المتخالفة

$$(\overleftrightarrow{بج}, \overleftrightarrow{دح}), (\overleftrightarrow{دك}, \overleftrightarrow{وز}), (\overleftrightarrow{أب}, \overleftrightarrow{حز})$$

(٤) ثلاثة أزواج من المستقيمت المتعامدة

$$(\overleftrightarrow{أب}, \overleftrightarrow{أه}), (\overleftrightarrow{هو}, \overleftrightarrow{دح}), (\overleftrightarrow{دح}, \overleftrightarrow{بو})$$

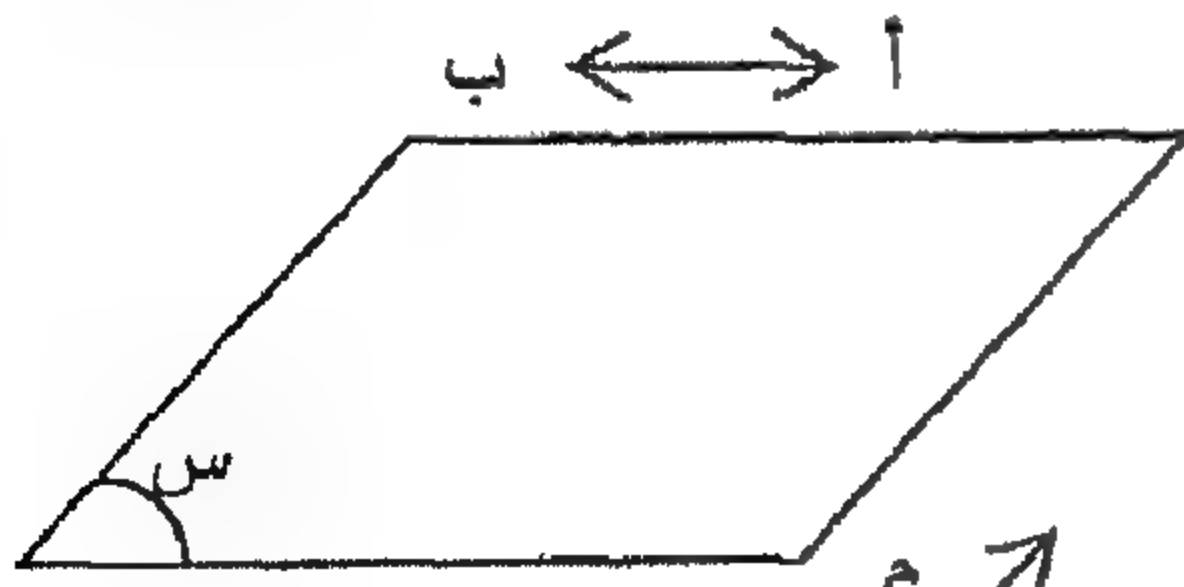
ثانياً العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفضاء

تتحصر هذه العلاقة في وضع من الأوضاع الثلاثة الآتية:

(١) مستقيم يوازي المستوى: حيث المستقيم لا يشترك مع المستوى في أية

نقطة كما في الشكل:

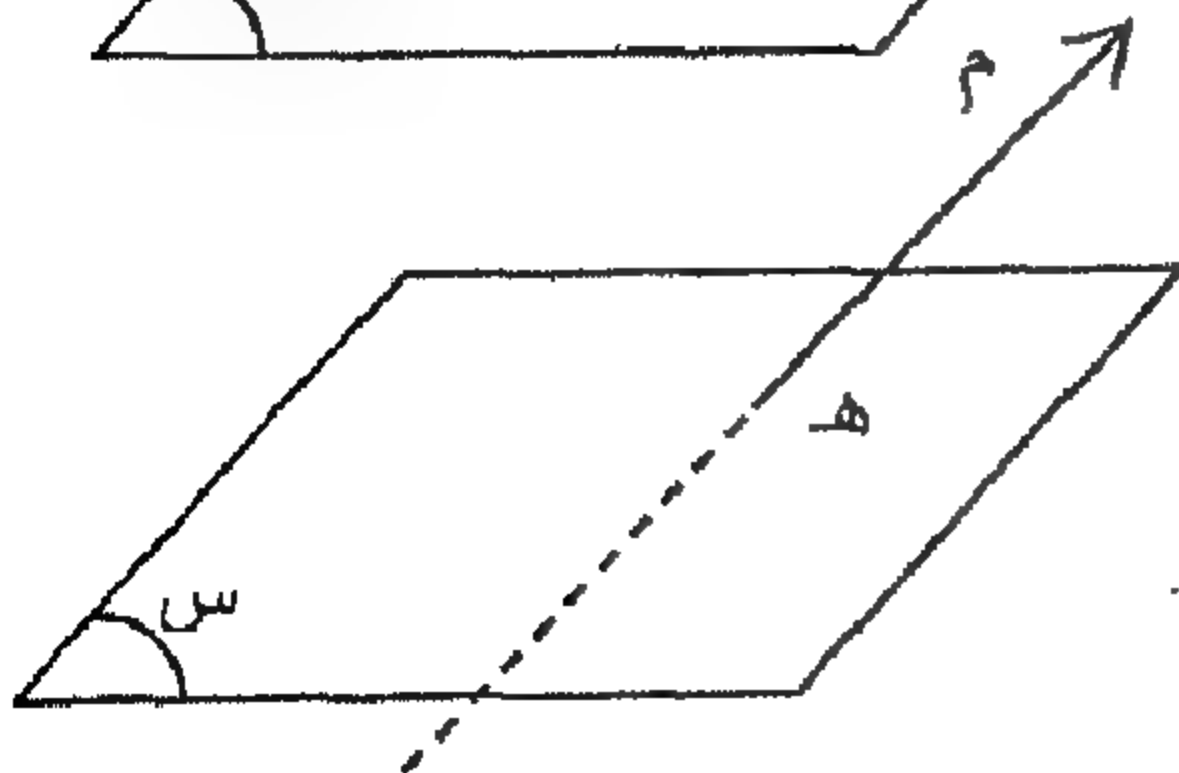
$$\overleftrightarrow{أب} // \text{المستوى س}$$



(٢) مستقيم يقطع المستوى في نقطة

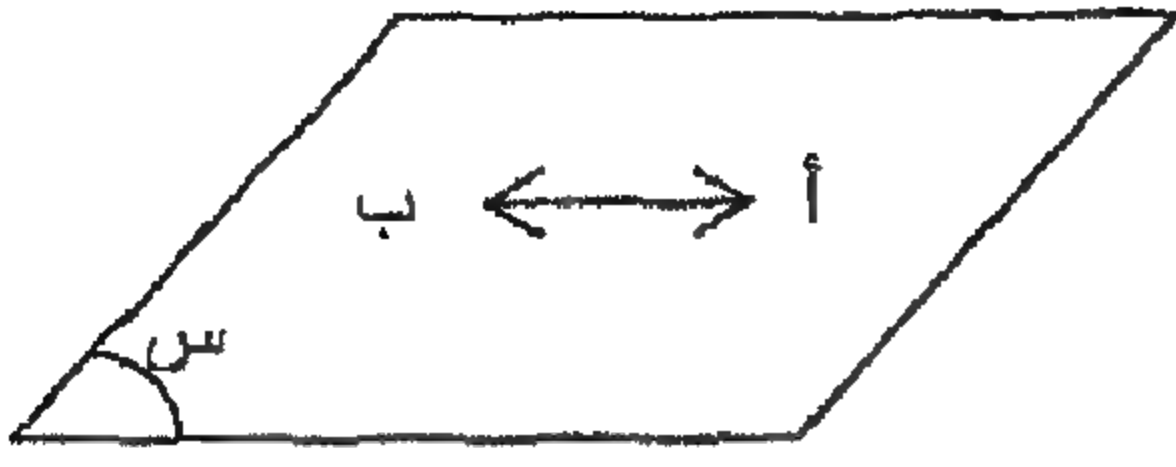
واحدة كما في الشكل:

$$\overleftrightarrow{مه} \text{ يقطع المستوى في نقطة هـ}$$





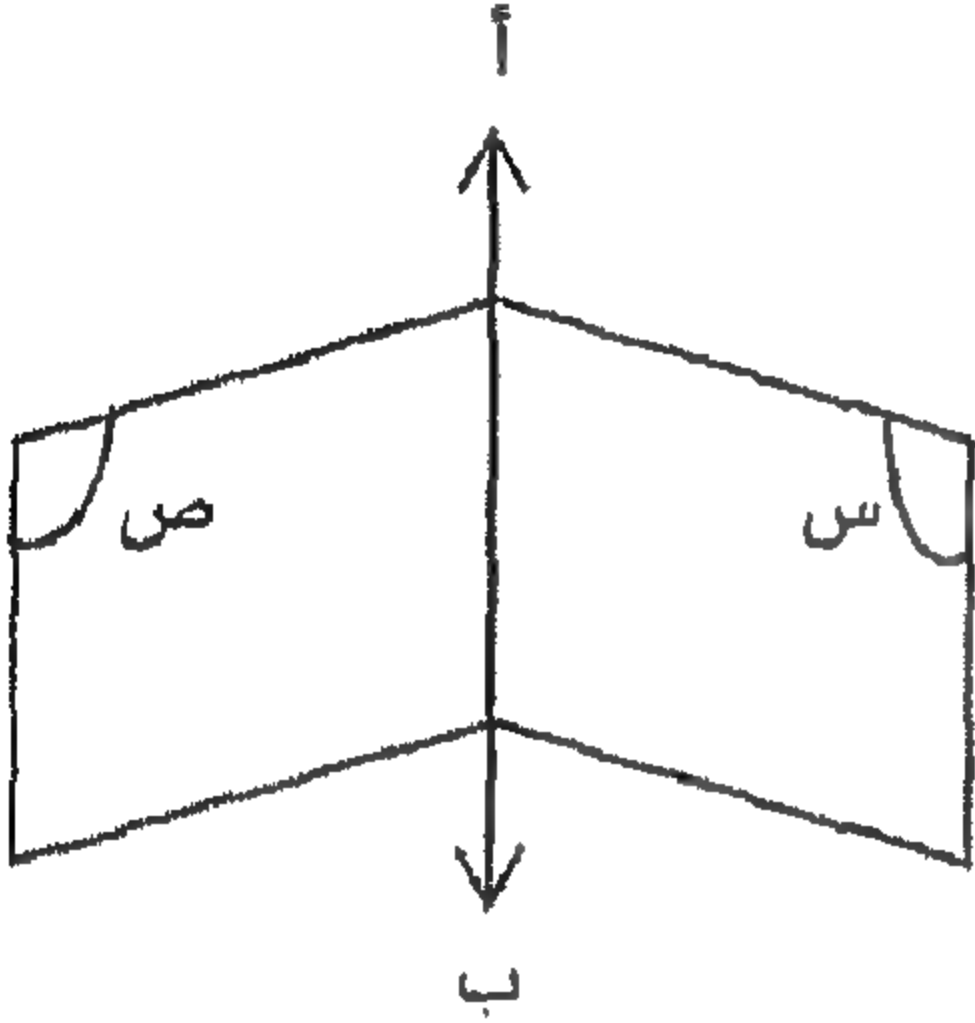
(٣) مستقيم يقع بكامله في المستوى كما في الشكل



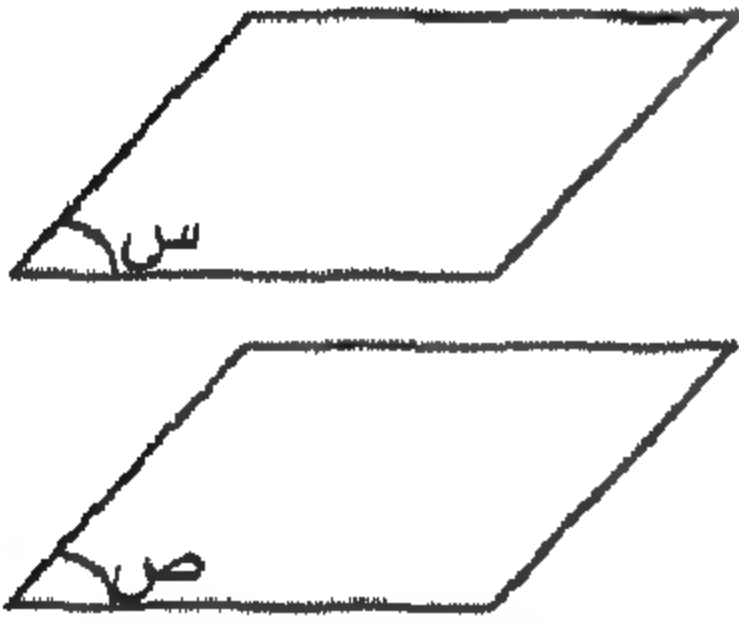
ثالثاً: العلاقة بين مستويين في الفضاء

تتحدد هذه العلاقة في حالتين:

(١) يتقاطع المستويان في مستقيم

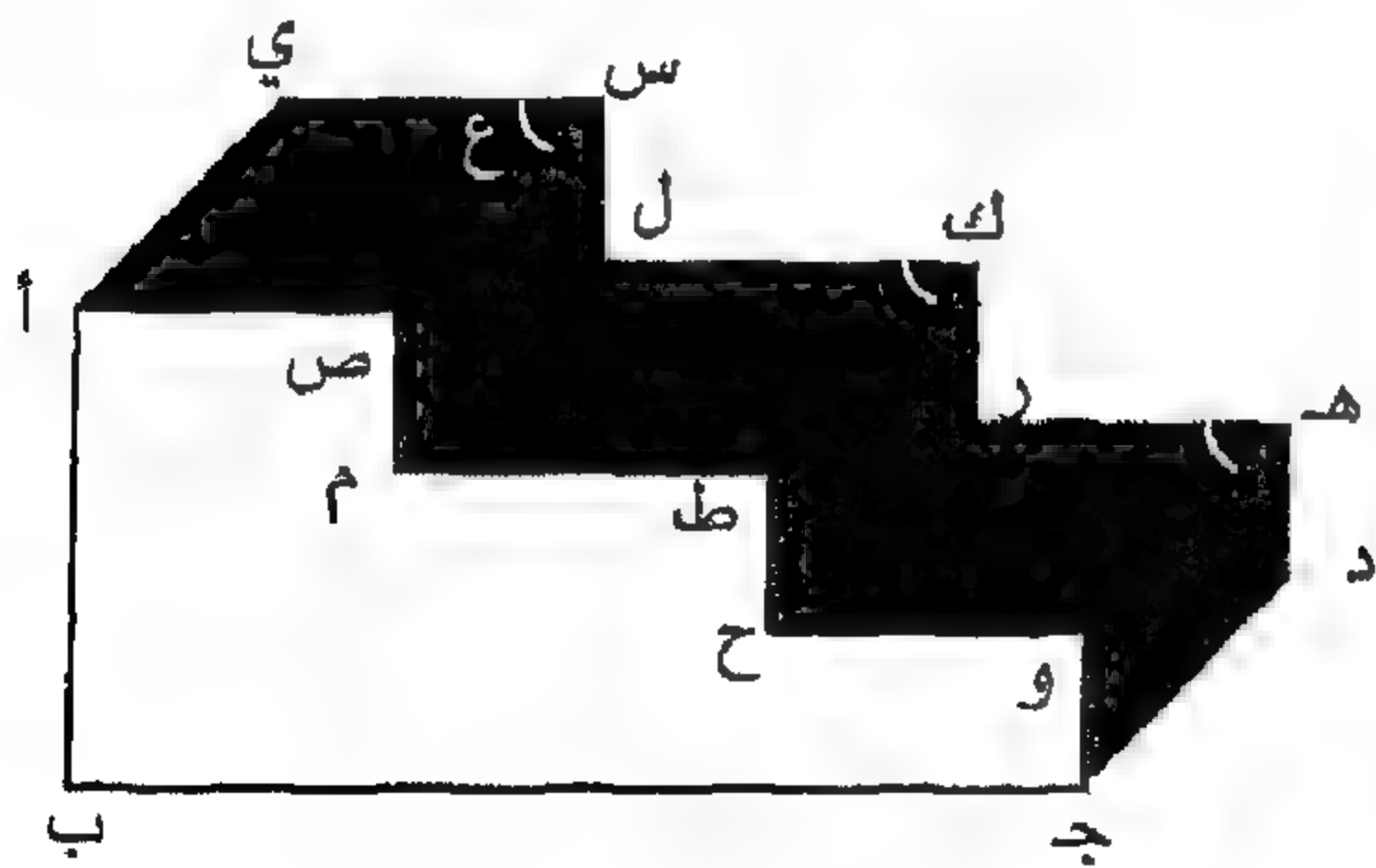


(٢) يتوازي المستويان حيث أنها لا يتقاطعان



مثال: من الشكل المجاور الذي يمثل درجاً لأحد المنازل أعط مثلاً

على:



(١) مستويان متوازيان

المستوى و هـ ر والمستوى ل ط م متوازيان.

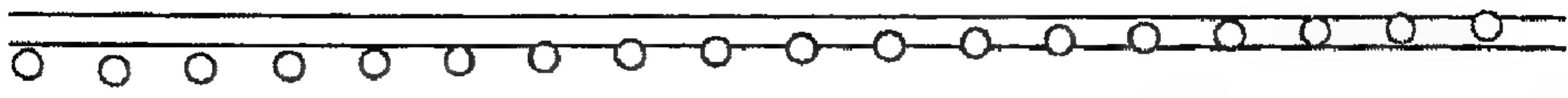
(٢) مستوى يوازي المستوى س ل م

المستوى ك ر ح

(٣) مستقيم يقطع المستوى أ ب ج

المستقيم ل م وغيره الكثير.





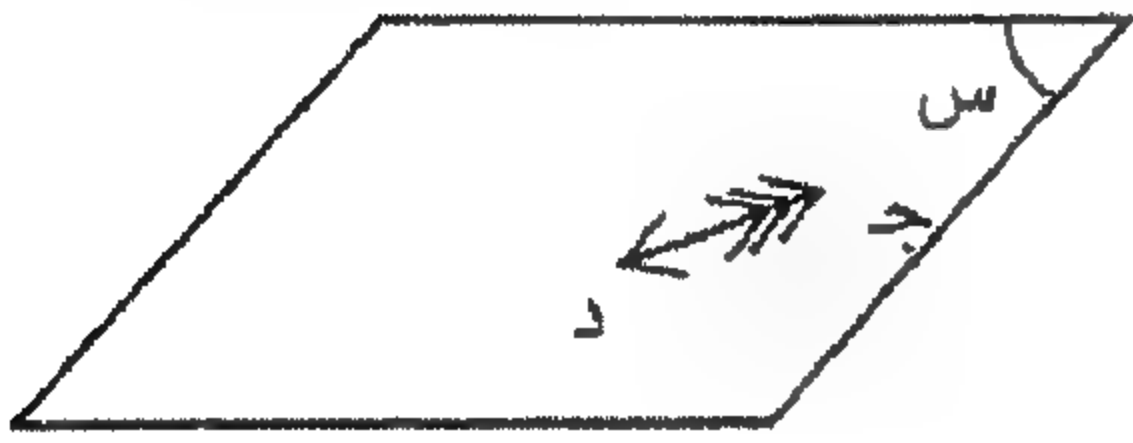
وأما النظريات فسنوردها كما هو آت:

(١) نظريات التوازي Paralleism Theorems

نظرية «١»

«إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيماً في المستوى فإنه يوازي هذا

المستوى».



والتوضيح:

$\overleftrightarrow{ab} // \text{المستوى س،}$

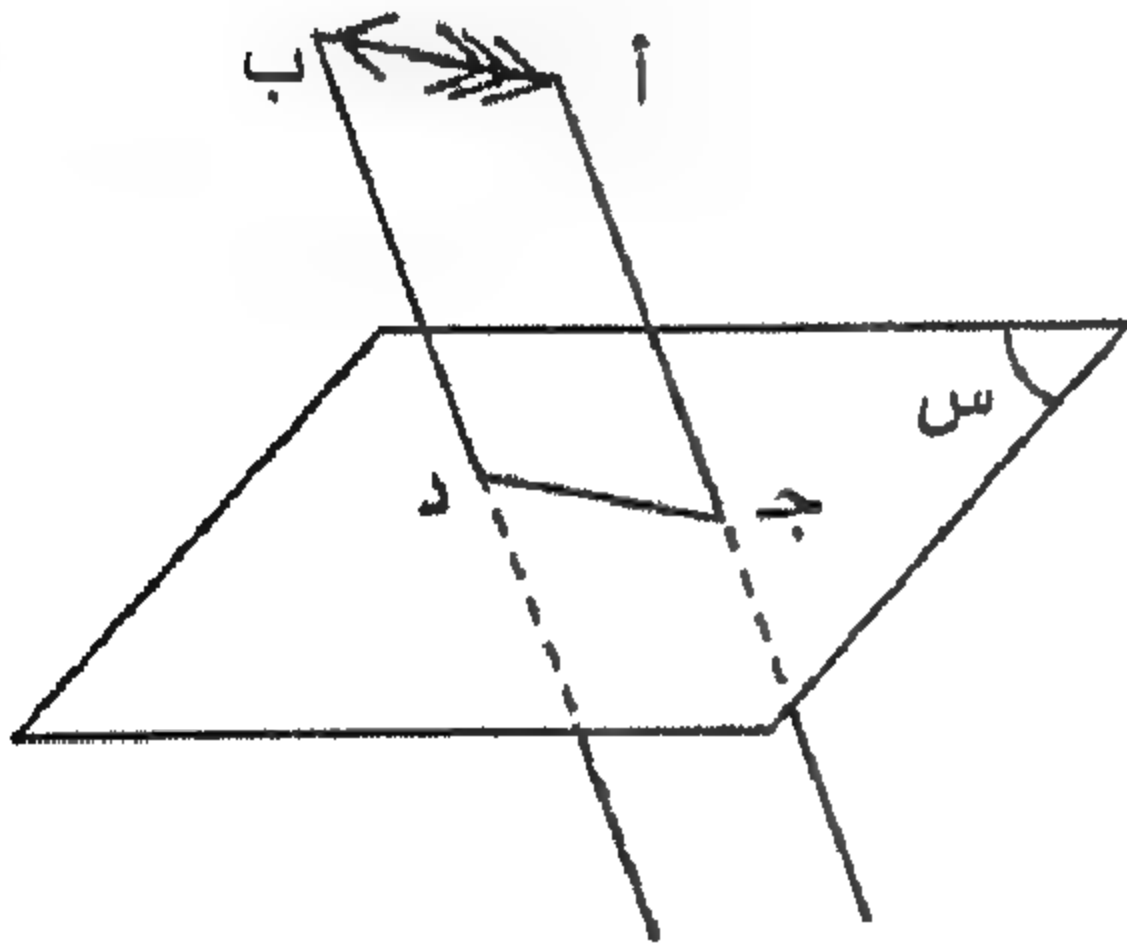
والمعنى أن $\overleftrightarrow{ab} // \overleftrightarrow{cd}$

عندها ينتج أن $\overleftrightarrow{ab} // \text{المستوى س}$

نظرية «٢»

«إذا وازى مستقيم مستوى فإن كل مستوى مار بالمستقيم وقاطع

المستوى المعلوم يقطعه في مستقيم يوازي المستقيم المعلوم».



والتوضيح:

$\overleftrightarrow{ab} // \text{المستوى س،}$

والمستوى ص يمر بالمستقيم \overleftrightarrow{ab}

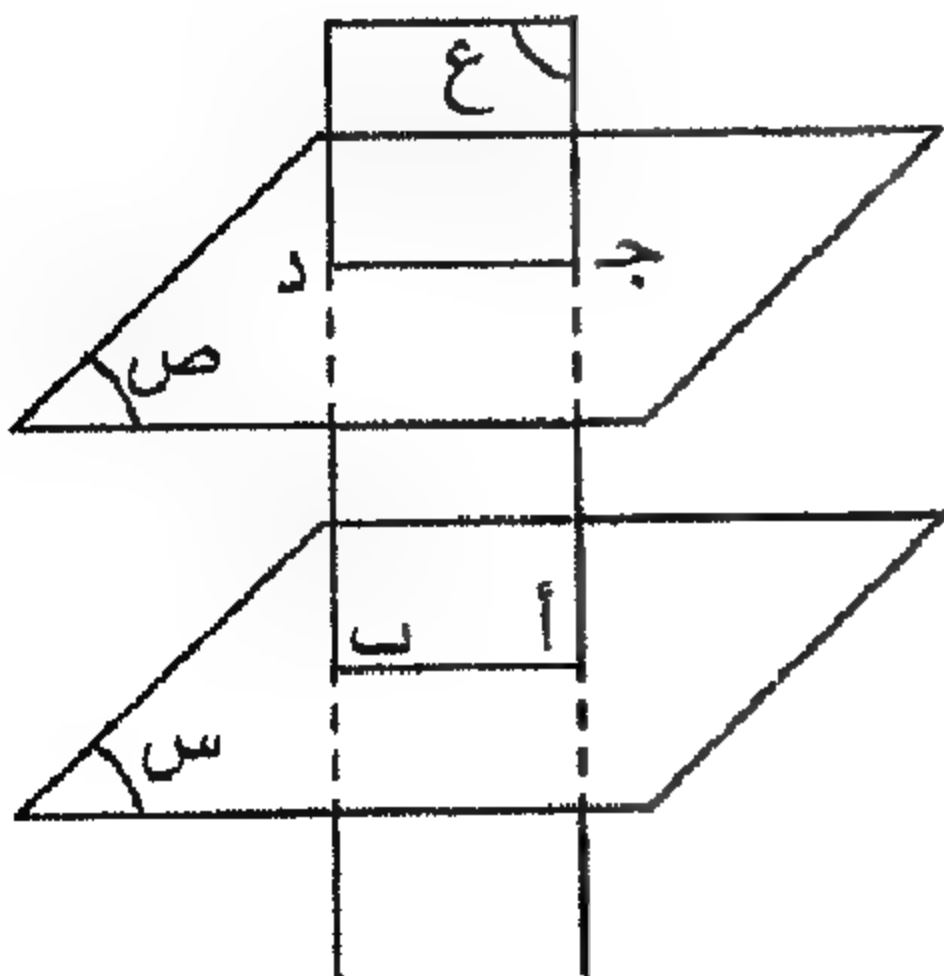
ويقطع المستوى س في المستقيم \overleftrightarrow{cd}

نظرية «٣»

إذا تقاطع مستوي مستويين متوازيين فإن

خطي تقاطعه مع المستويين متوازيان.

والتوضيح:





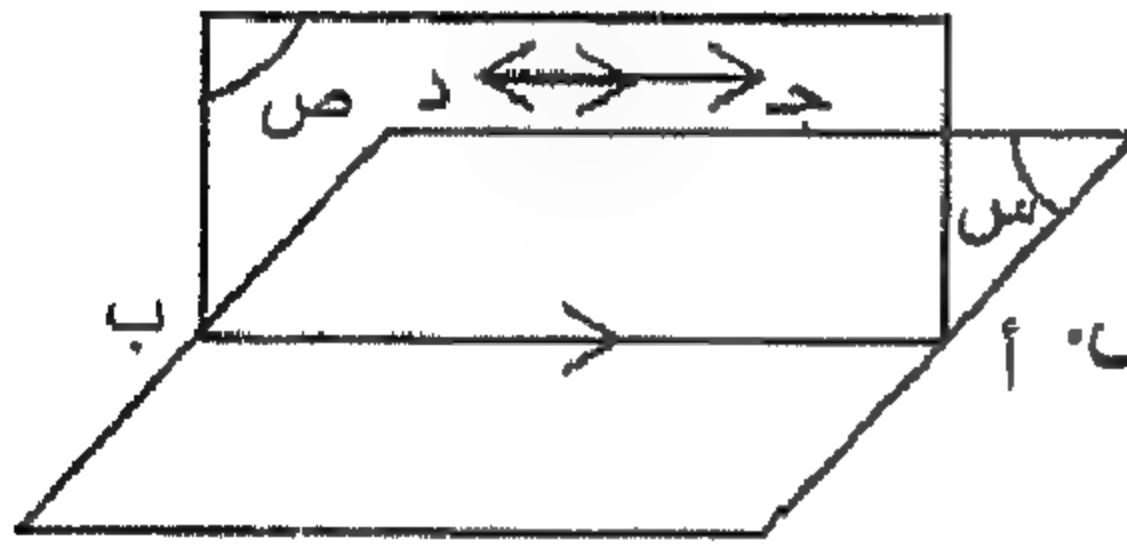
والمستوى يوازي المستوى ص والمستوى ع قاطع الباقي المستقيم

\longleftrightarrow \longleftrightarrow
أ ب ، ج د

أي أن أ ب \parallel ج د // كونهما واقعيتين في مستويين متوازيين فهما لا يلتقيان ولا يتقاطعان أي أنهما متوازيان.

نظرية « ٤ »

إذا تقاطع مستويان ورسم في أحدهما مستقيم يوازي المستوى الآخر فإن هذا المستقيم يوازي خط تقاطع المستويين.

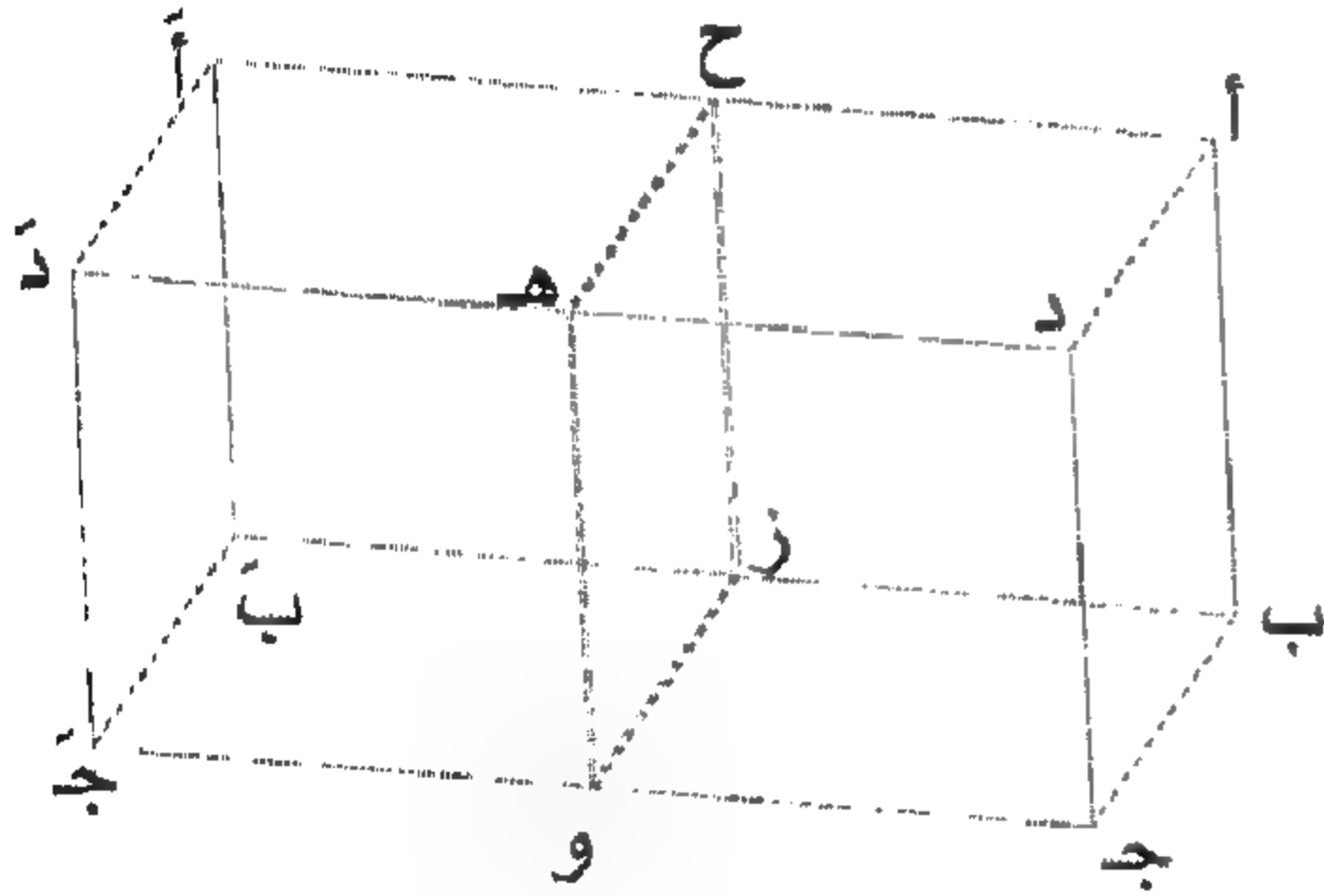


والتوضيح:

\longleftrightarrow
ج د يقع في المستوى ص ويوازي المستوى س. أ

\therefore ج د \parallel أ ب خط تقاطعهما.

مثال: يمثل الشكل متوازي مستطيلات أ ب ج د د' ج' ب' أ'



قطع المستوى س أحرفه في و، ز، ح، هـ كما هو واضح في الشكل

فالشكل وز ح هـ متوازي أضلاع كون \longleftrightarrow ح هـ واقع في المستوى أ د د' أ' والذي يوازي المستوى ب ج ج' ب'

\therefore ح هـ \parallel و ز خط التقاطع

وكذلك ح ز \parallel هـ و خط التقاطع

فالشكل هـ و ز ح شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين فهو متوازي أضلاع.

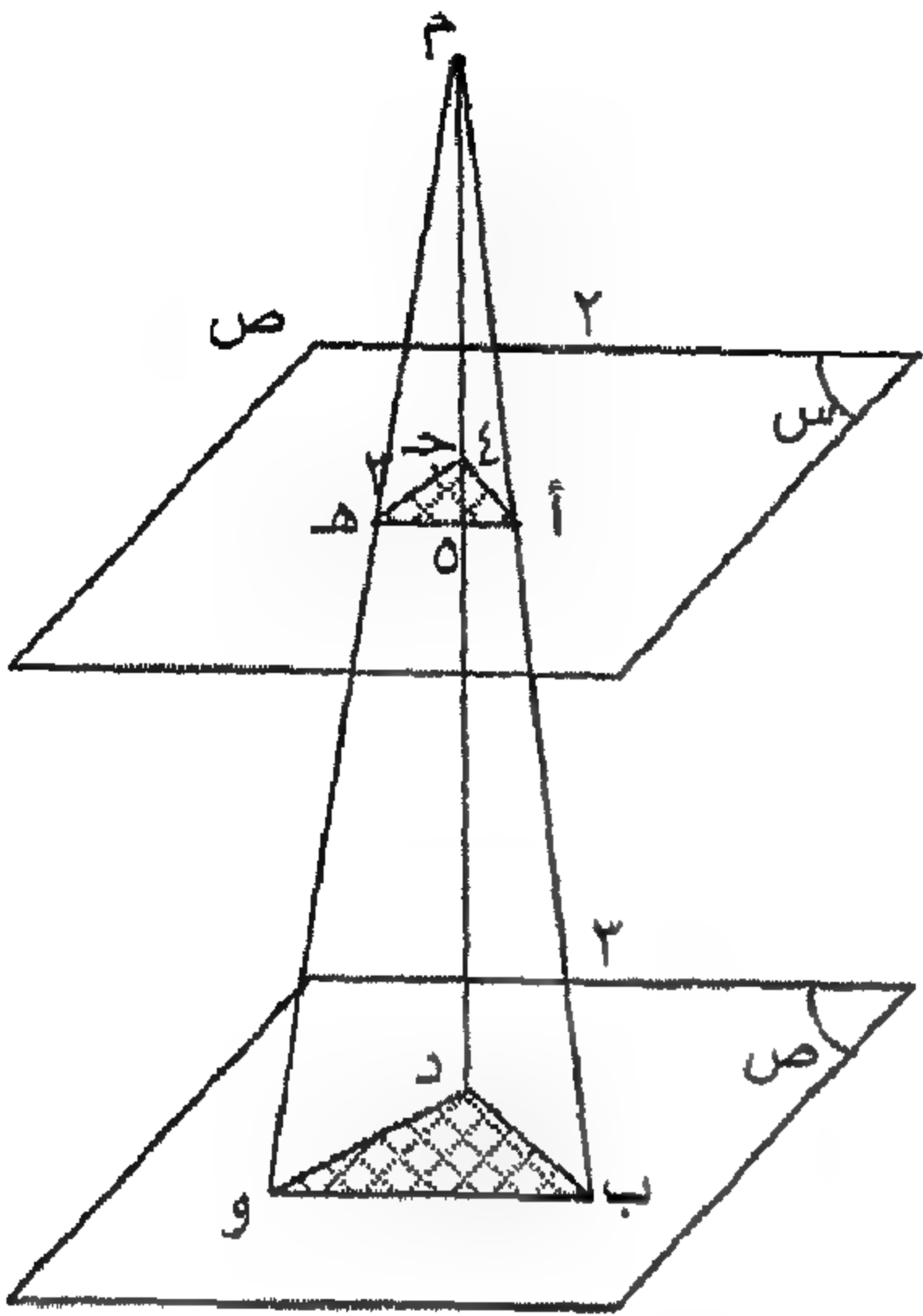
مثال: المستويان س، ص متوازيان، والنقطة م خارجها والمستقيمان م أ ب





، م ج د ، م هـ و قطعت المستويين كما في

الشكل



وكان $\frac{م أ}{أ ب} = \frac{٢}{٣}$ ، $أ ج = ٤$ سم ،

ج هـ = ٣ سم ، أ هـ = ٥ سم

أوجد أطوال أضلاع المثلث ب د و ثم

مساحته.

$$\frac{م أ}{أ ب} = \frac{م ج}{ج د} = \frac{م هـ}{هـ د}$$

(كون $أ هـ \parallel أ ج$ خطي تقاطع

المستوى م ب د مع المستويين س ، ص)

$$\frac{٤}{ب د} = \frac{٢}{٣} \quad \leftarrow ب د = \frac{٤ \times ٣}{٢} = ٦ \text{ سم.}$$

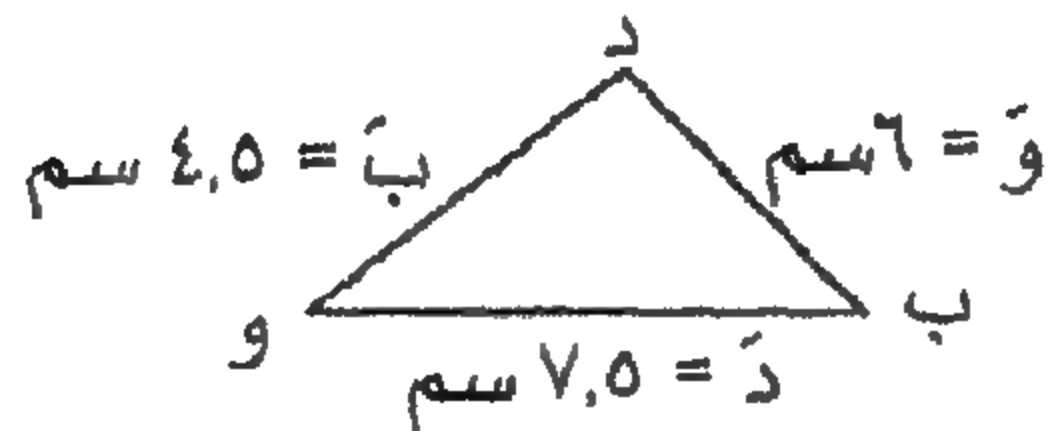
$$\frac{م أ}{أ ب} = \frac{م هـ}{هـ د} \quad (كون \quad أ هـ \parallel ب و \quad \text{لنفس السبب السابق})$$

$$\therefore \frac{٢}{٣} = \frac{٥}{ب و} = \frac{٥ \times ٣}{٢} = ٧,٥ \text{ سم.}$$

$$\frac{م أ}{أ ب} = \frac{م هـ}{هـ د} \quad (كون \quad أ هـ \parallel ب و)$$

$$\frac{م ج}{ج د} = \frac{م هـ}{هـ د} \quad (كون \quad ج هـ \parallel د و)$$

$$\frac{٣}{د و} = \frac{٢}{٣} \quad \leftarrow د و = \frac{٣ \times ٣}{٢} = ٤,٥ \text{ سم.}$$



فأضلاع المثلث

مساحة المثلث ب د و = $\sqrt{ح(ح - (م - د)(م - و)(م - ب))}$

حيث $ح = \frac{أ + ب + ج}{٢}$ (نصف المحيط)

الهندسة الفضائية



$$9 \text{ سم} = \frac{18}{2} = \frac{7,5 + 4,5 + 6}{2} =$$

$$\sqrt{(4,5 - 9)(6 - 9)(7,5 - 9)9} = \text{مساحة المثلث د ب و}$$

$$= \sqrt{(4,5)(3)(1,5)(9)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{45}{10}\right)(3)\left(\frac{15}{10}\right)(9)}$$

$$= \sqrt{\frac{3 \times 3 \times 5 \times 3 \times 3 \times 5 \times 3 \times 3}{100}}$$

$$13,5 \text{ سم} = \frac{27}{2} = \frac{5 \times 3 \times 3 \times 3}{10} =$$

(٢) نظريات التعامد Perpendicularity Theorems

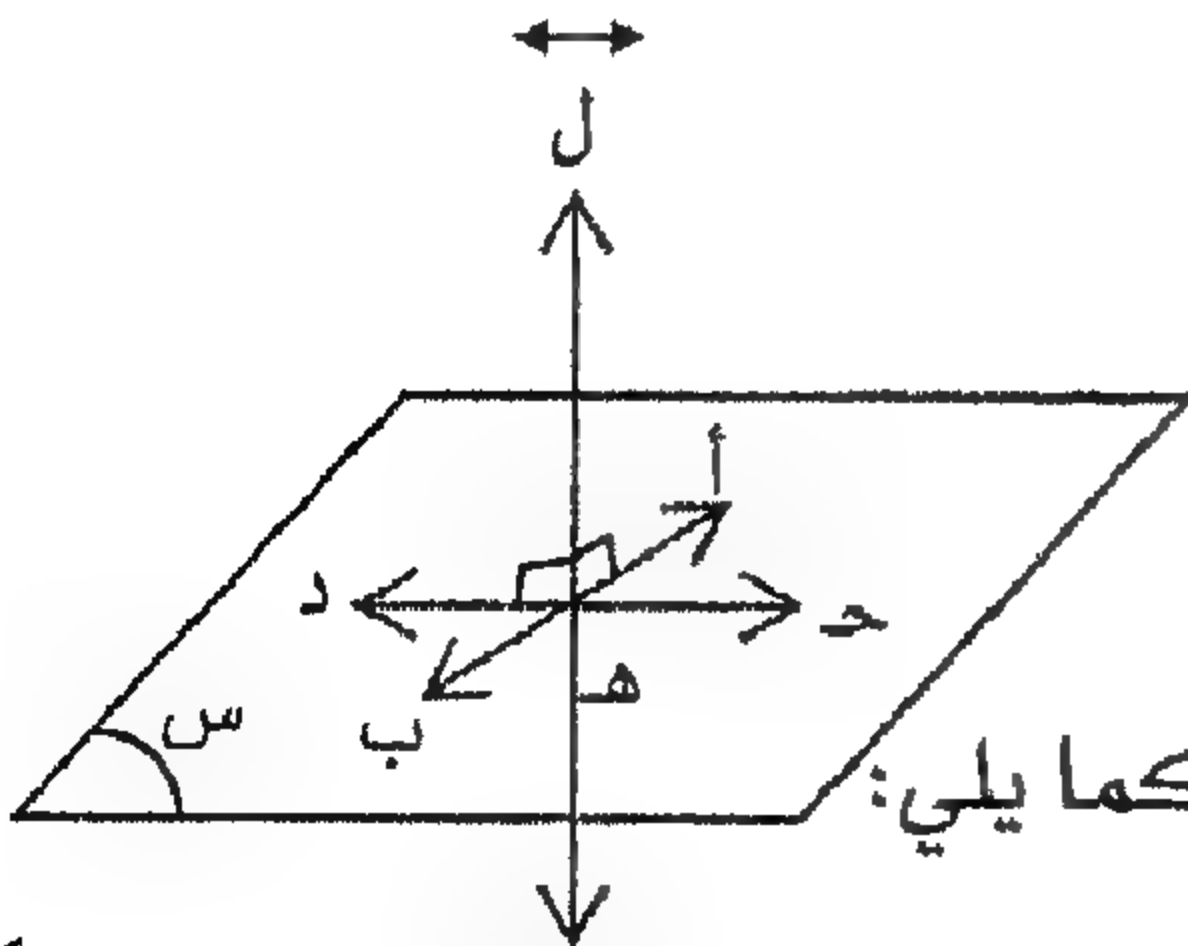
نظرية (١)

يكون المستقيم عمودياً على مستوى إذا كان عمودياً على المستقيمات جميعها الواقعة في المستوى والمارة بنقطة تقاطع المستقيم مع المستوى.

والتوضيح:

المستقيم $ل$ عمودياً على المستوى $س$ لأنه عمودياً على $أ ب$ ، $ج د$ المتقاطعان

في النقطة $هـ$ ويبعد عن ذلك $ل \perp س$



ويقرأ المستقيم $ل$ عمودي على المستوى $س$.

ويمكن أن يُصاغ منطوق النظرية للتسهيل كما يلي:

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين في مستوى واحد يكون عمودياً

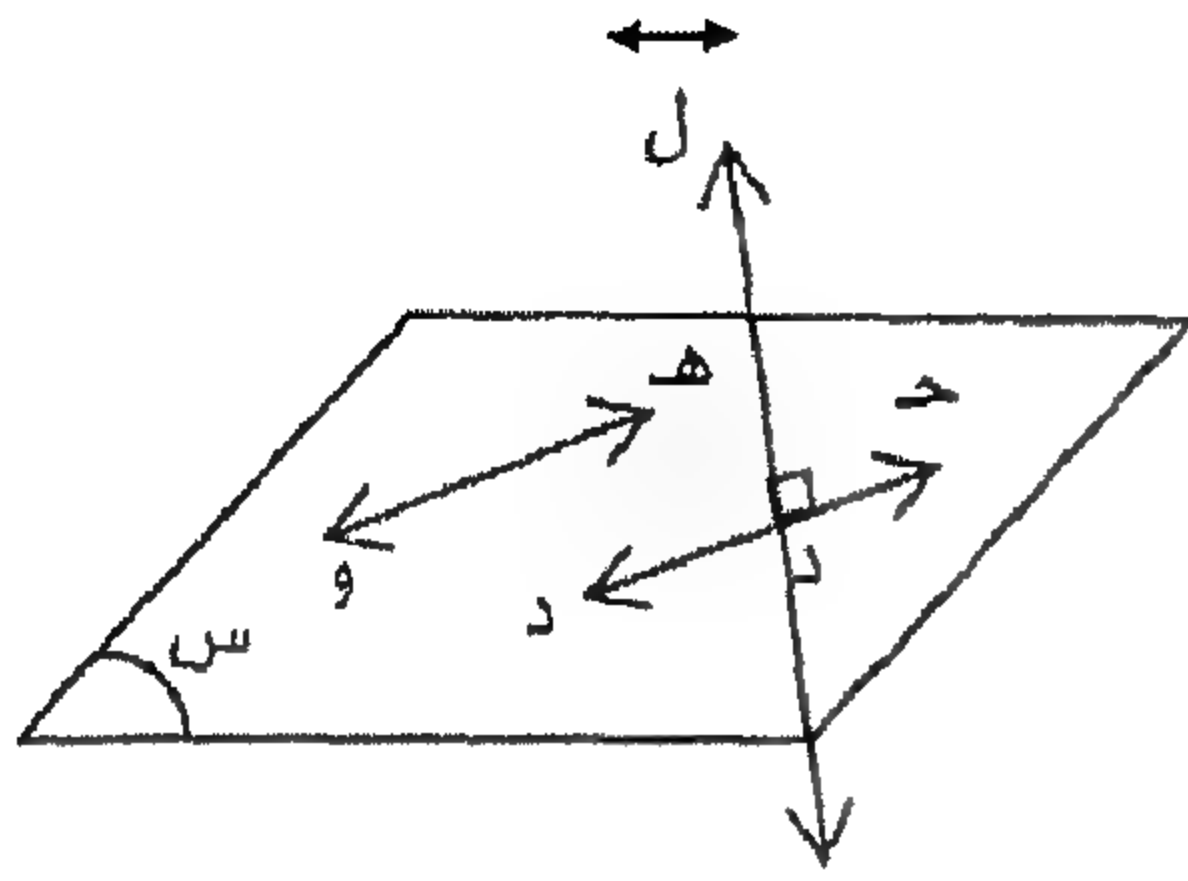
على مستويهما.





وبشكل عام: المستقيم العمودي على مستوى يكون عمودياً على كل

مستقيم فيه كما في الشكل



ل \perp المستوى س

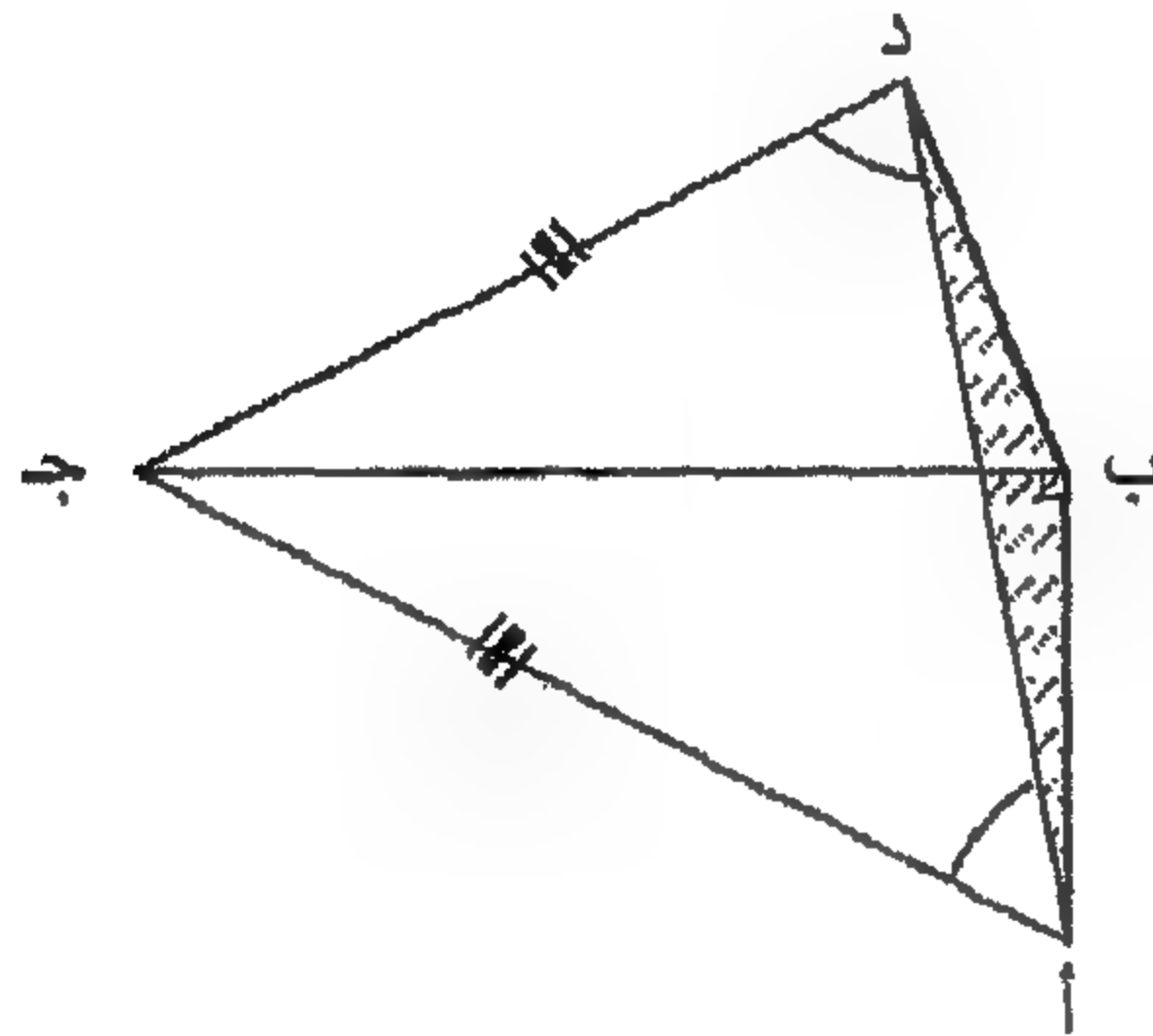
∴ ل \perp المستقيم هـ و والتوضيح

نرسم جـ د // هـ و فلأن ل \perp جـ د

فكأنه ل \perp هـ و // جـ د

مثال: أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب «كما في الشكل» د نقطة ليست

في مستوى المثلث.



بحيث أن ب د = ب أ، د ج = ج أ

بين أن: جـ ب \perp المستوى أ ب د

البيان:

بما أن جـ ب \perp أ ب بالفرض ①

ومن انطباق المثلثين أ ب ج، د ب جـ



بثلاثة أضلاع

أ ب = ب د معطيات

أ ج = ج د معطيات

ب ج مشترك

ينتج أن $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$

∴ $\overline{ب ج} \perp \overline{ب د}$ (٢)

أي أن $\overline{ب ج} \perp (أ ب ، ب د)$ عند نقطة التقاطع د

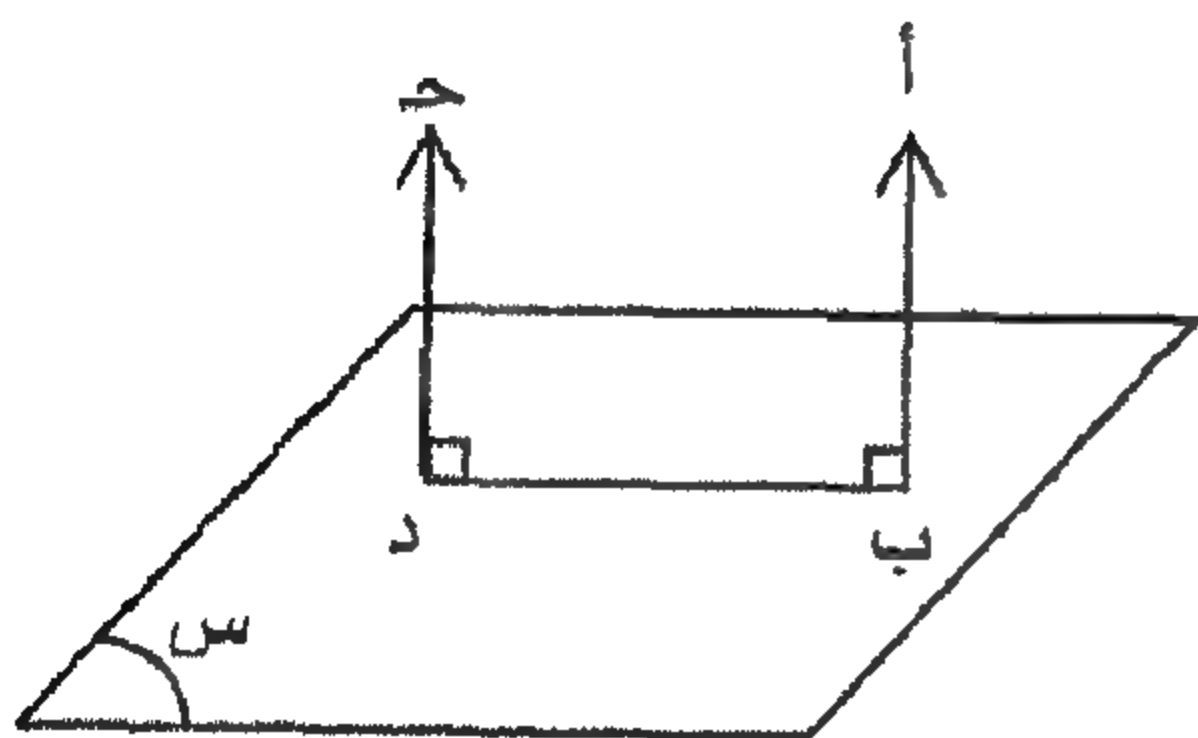
∴ $\overline{ب ج} \perp$ المستوى الذي يضم $\overline{أ ب} ، \overline{ب د}$ وهو المستوى أ ب د

وهو المطلوب بيانه.

نظرية (٢)

المستقيمان العموديان على مستوى واحد متوازيان.

والتوضيح:

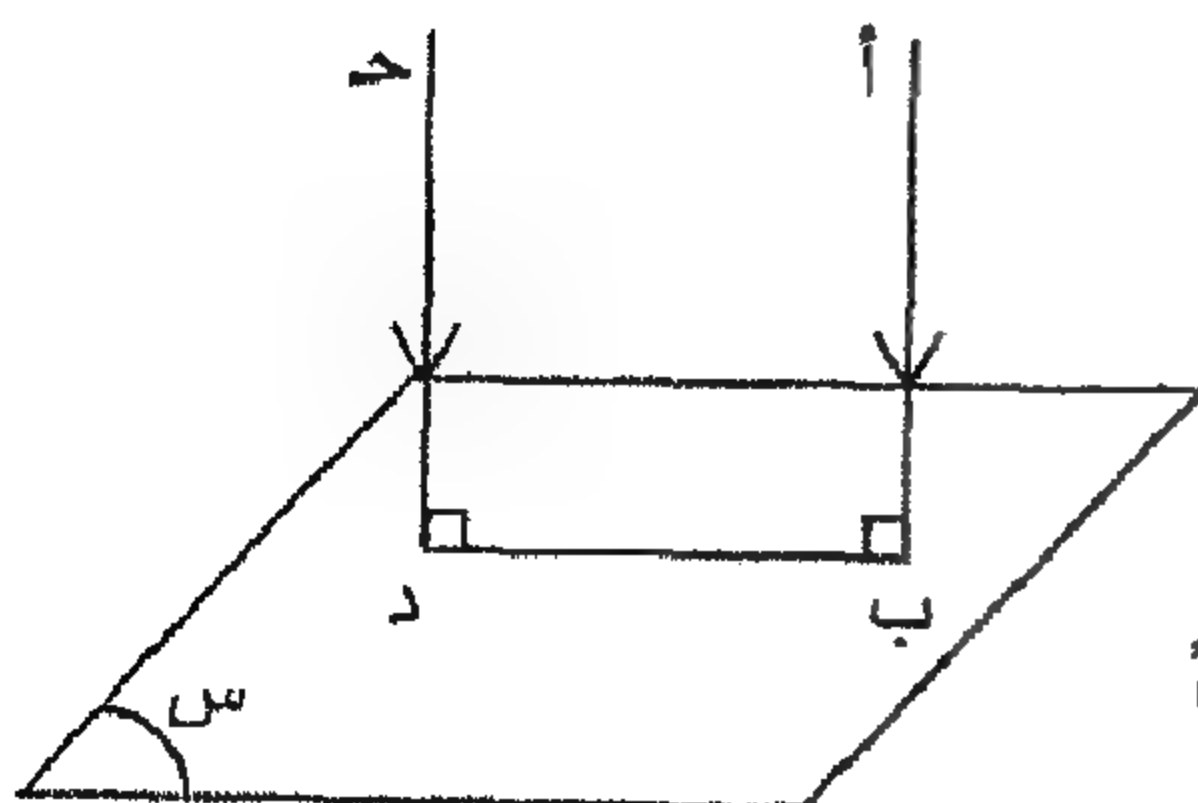


بما أن $\overleftrightarrow{أ ب} \perp$ المستوى س

$\overleftrightarrow{ج د} \perp$ المستوى س

∴ $\overleftrightarrow{أ ب} \parallel \overleftrightarrow{ج د}$

نظرية (٣)



إذا توازي مستقيمان وكان أحدهما عمودياً

على مستوى فإن المستقيم الآخر يكون عمودياً

على المستوى نفسه.



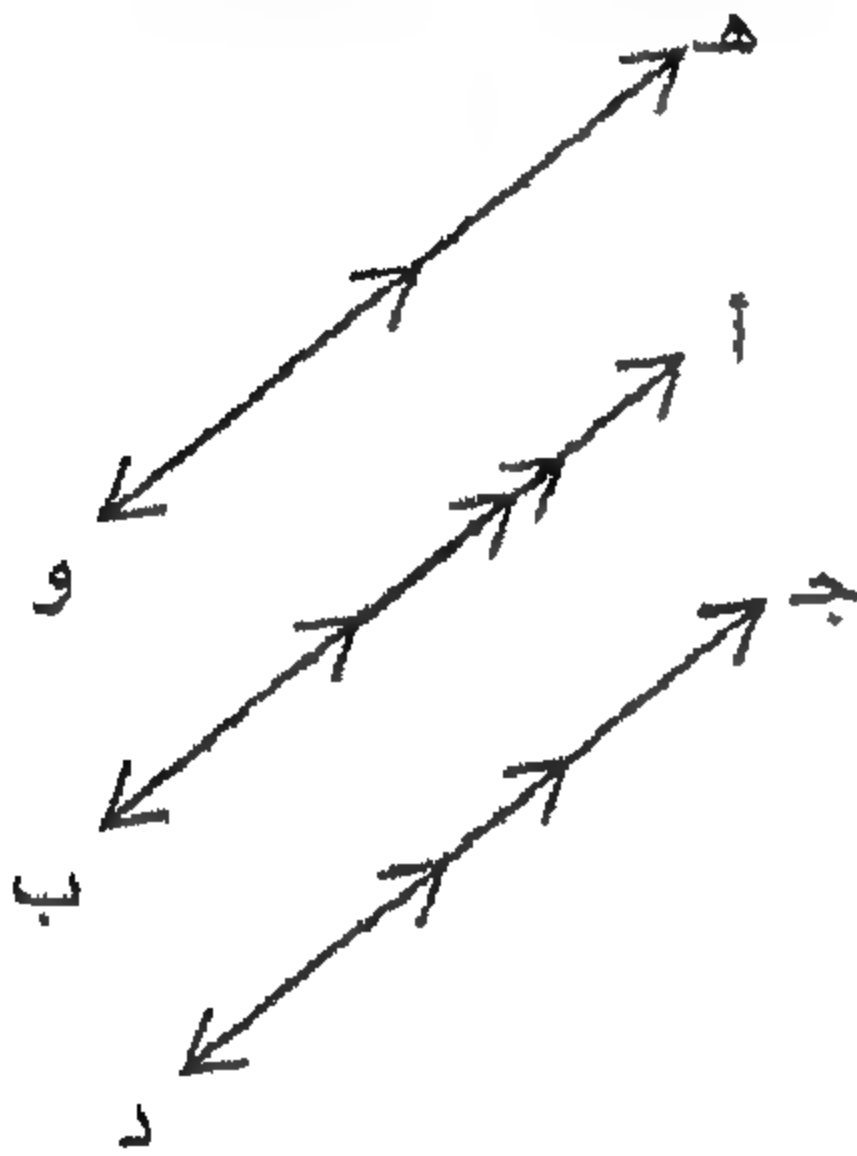
والتوضيح:

$$\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{جد}$$

$$\overleftrightarrow{أب} \perp \text{المستوى س}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{جد} \perp \text{المستوى س}$$

وبشكل عام المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفراغ متوازيان



والتوضيح:

$$\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{جد}$$

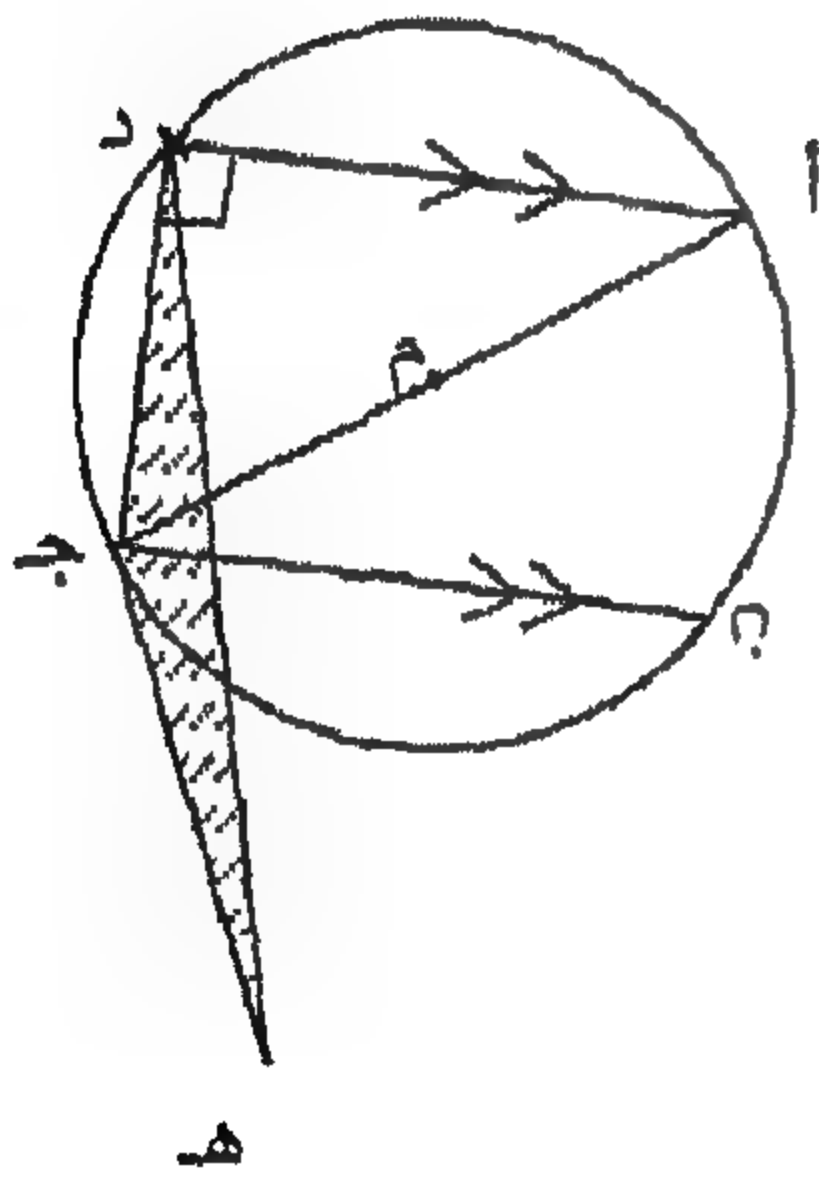
$$\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{هـ و}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{جد} \parallel \overleftrightarrow{هـ و}$$

$$\text{أي أن } \overleftrightarrow{جد} \parallel \overleftrightarrow{هـ و}$$

← مثال: أ ج قطر في دائرة،

د نقطة على الدائرة، رسم ج د



موازيًا للمستقيم د أ.

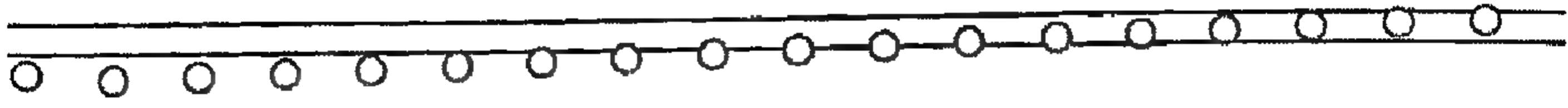
$$\text{بين أن } \overleftrightarrow{ج د} \perp \text{المستوى هـ د ج}$$

$$\text{بما أن } \overleftrightarrow{ج د} \parallel \overleftrightarrow{أ د}$$

$$\text{لكن } \overleftrightarrow{أ د} \perp \text{المستوى د ج هـ}$$

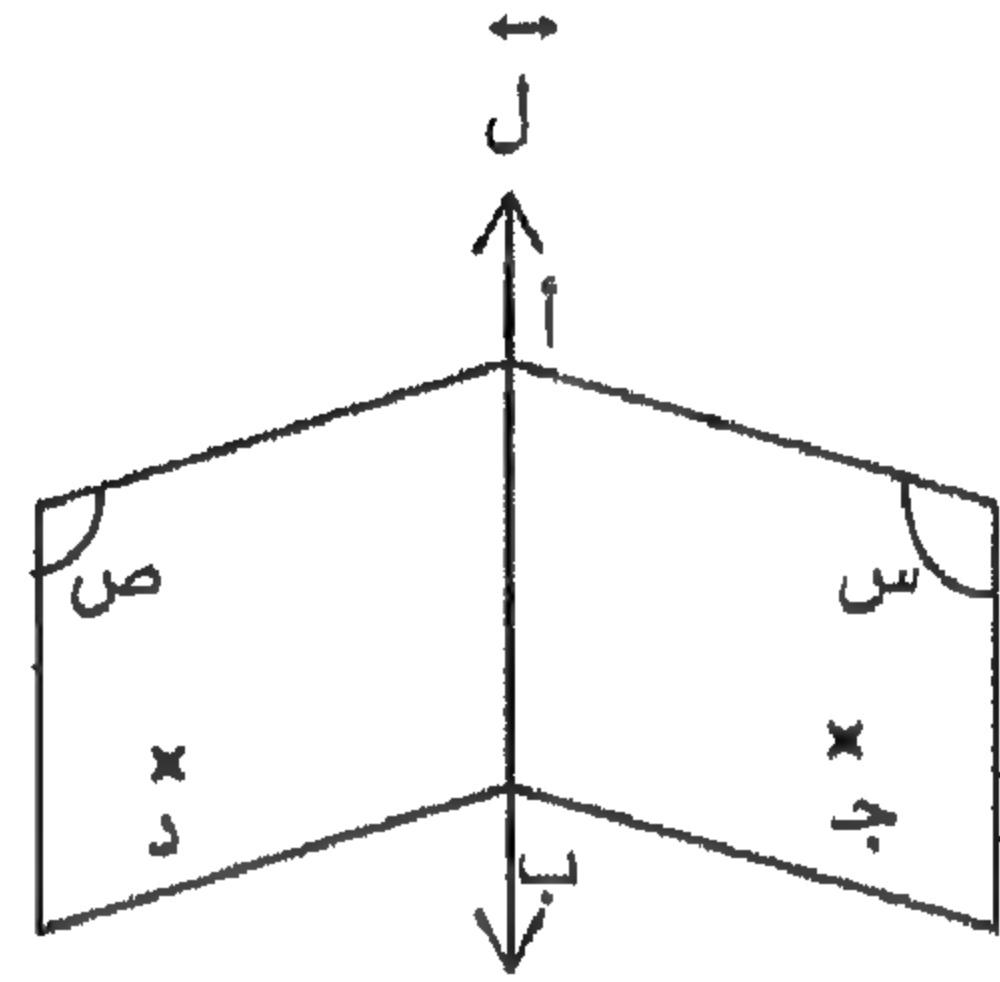
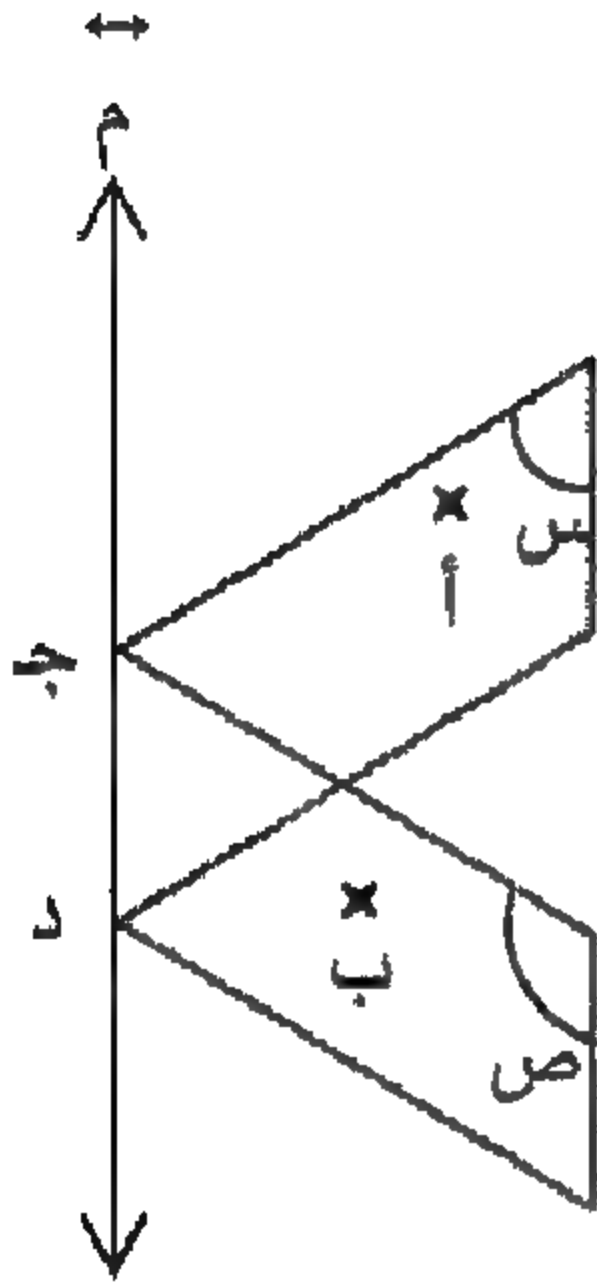
كون $\angle أ د ج = 90^\circ$ لأنها محيطين تقابل خط الدائرة أ ج

$$\therefore \overleftrightarrow{ج د} \parallel \overleftrightarrow{أ د}$$



(٣) الزاوية الزوجية The Even Angle

هي اتحاد نصفي مستويين مثل س، ص متقاطعين في مستقيم مثل \overleftrightarrow{AB} ، ويرمز لها بأربعة أحرف، بحيث يمثل الحرف الأول نقطة في أحد نصفي المستويين والحرف الأخير نقطة في نصف المستوى الآخر، والحرفان الوسطان فيمثلان المستقيم المشترك بينهما كما في الأشكال:



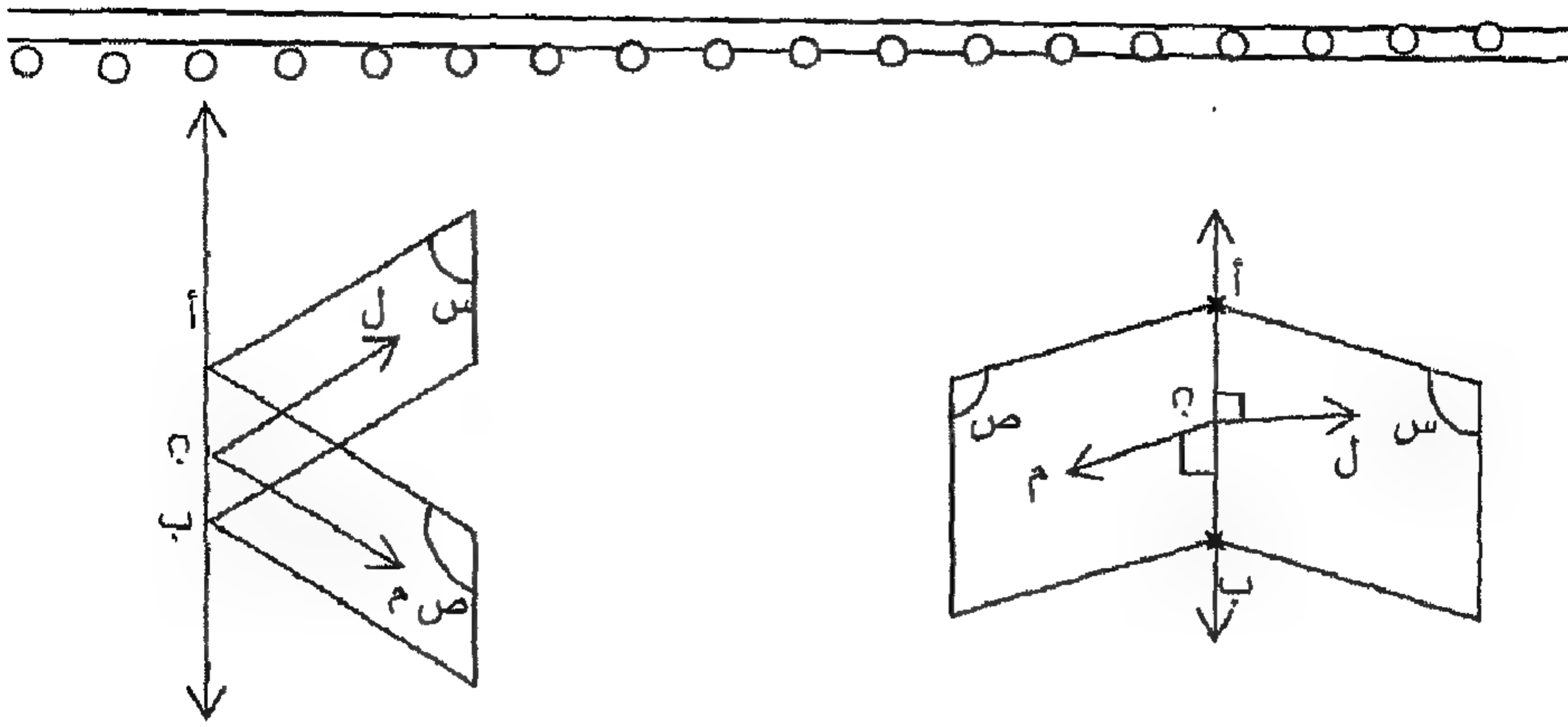
وتقرأ: الزاوية الزوجية (جـ، \overleftrightarrow{AB} ، د) وكذلك الزاوية الزوجية (أ، \overleftrightarrow{CD} ، ب)

ويُسمى كل من نصفي المستويين س، ص وجهاً للزاوية الزوجية

ويسمى المستقيم \overleftrightarrow{AB} أو المستقيم \overleftrightarrow{CD} الناتج عن تقاطع نصفي المستويين حرف الزاوية الزوجية.

وكان الزاوية الزوجية هي اتحاد نصفي مستويين لهما الحرف نفسه.

وأما قياسهما فيتم بأخذ نقطة على حرفها مثل \angle وكما في الشكلين التاليين تم رسم \angle عموداً على الحرف \overleftrightarrow{AB} في المستوى الأول س و \angle وعموداً على الحرف \overleftrightarrow{AB} في المستوى ص كما في الشكلين التاليين:



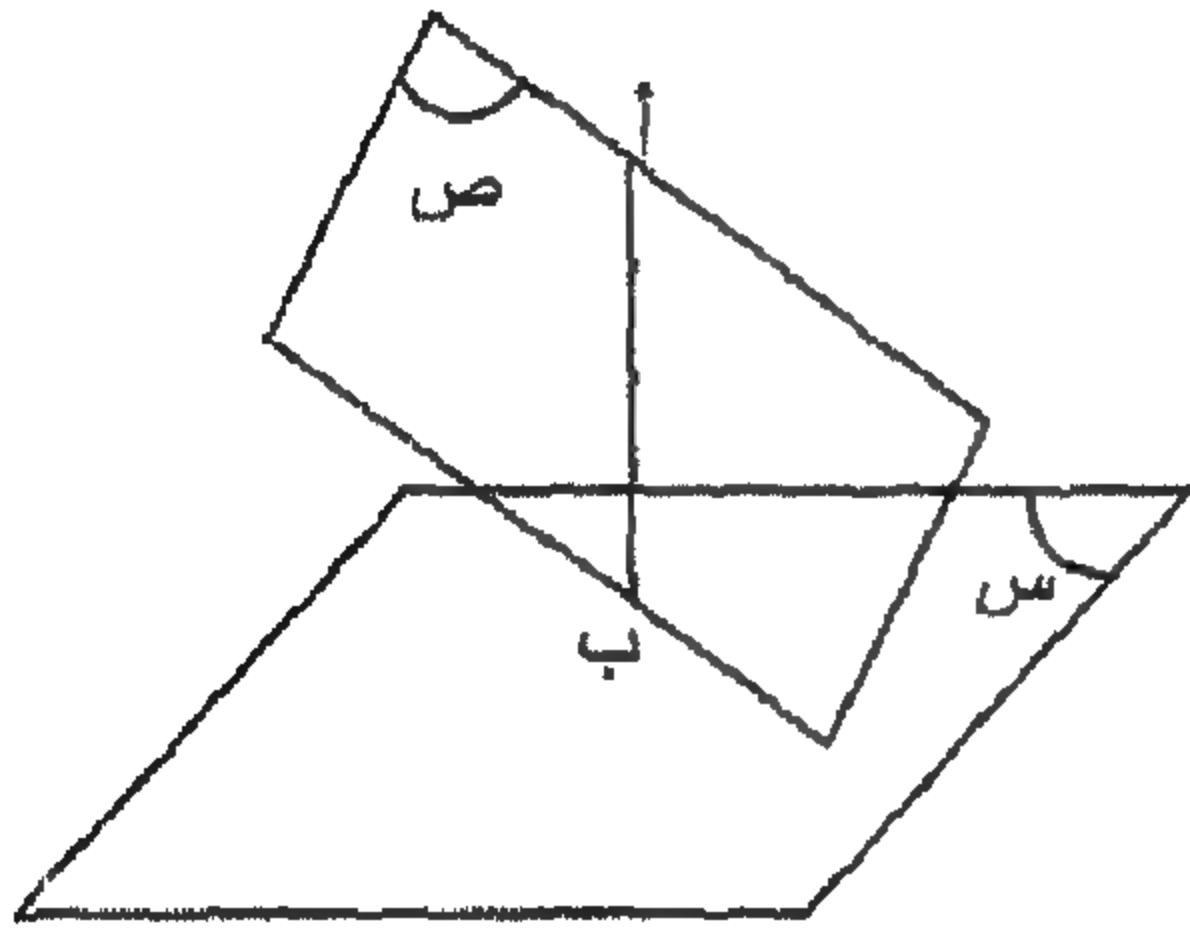
فيصبح قياس الزاوية الزوجية

(ل، \overleftrightarrow{AB} ، م) هو قياس الزاوية المستوية ل م وكما في الشكلين أيضاً.

فإذا كان قياس الزاوية الزوجية بين المستويين 90° فإن المستويين متعامدين

والعكس صواب إذا كان المستويان متعامدين فإن قياس الزاوية الزوجية بينهما 90° .

نظرية (٤)



إذا كان مستقيم معلوم عمودياً على

مستوى معلوم، فكل مستوى يحوي ذلك المستقيم

يكون عمودياً على المستوى المعلوم.

والتوضيح:

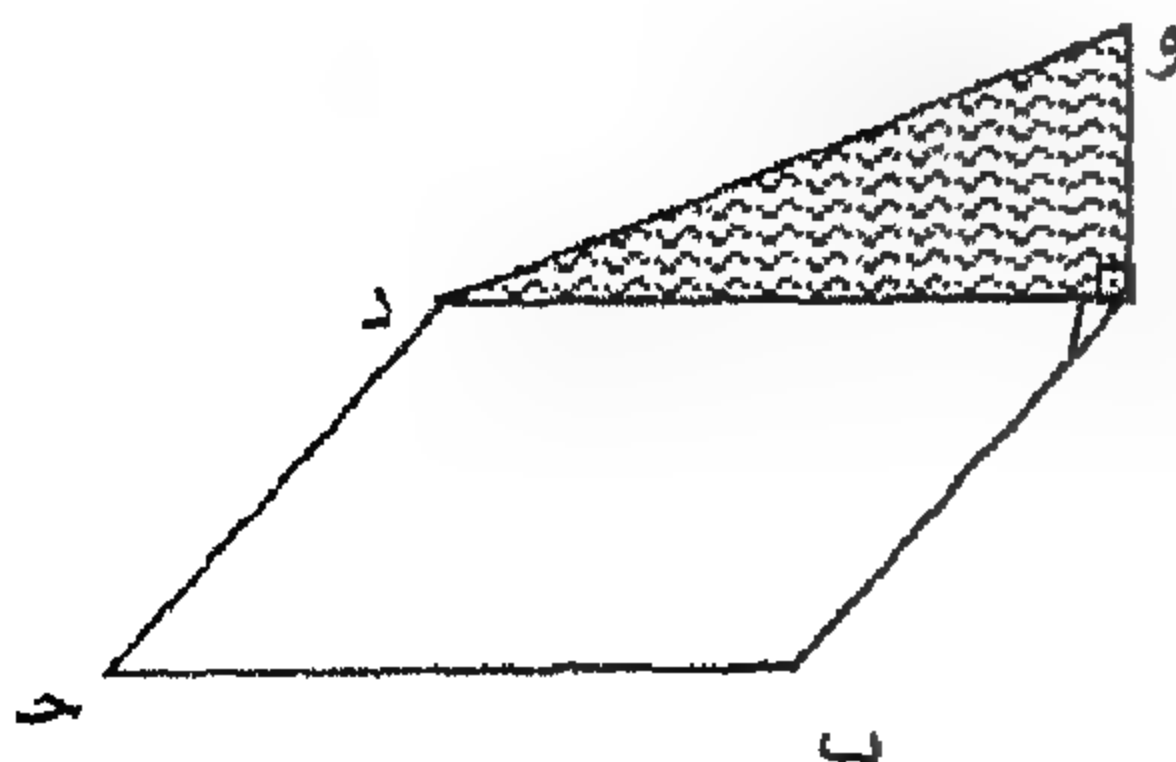
$\overleftrightarrow{AB} \perp$ المستوى س ويلاقيه في نقطة ب والمستوى ص يحوي المستقيم \overleftrightarrow{AB}

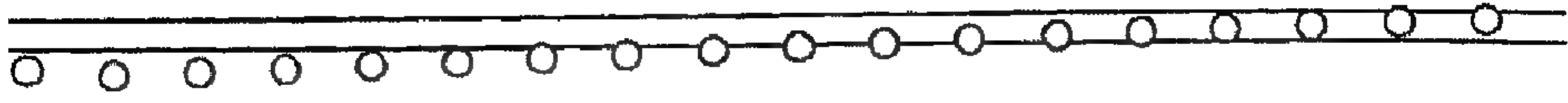
فإن المستوى ص \perp المستوى س.

مثال: أ ب ج د مستوى، أ و \perp المستوى أ ب ج د

بين أن المستوى أ و د \perp أ ب ج د

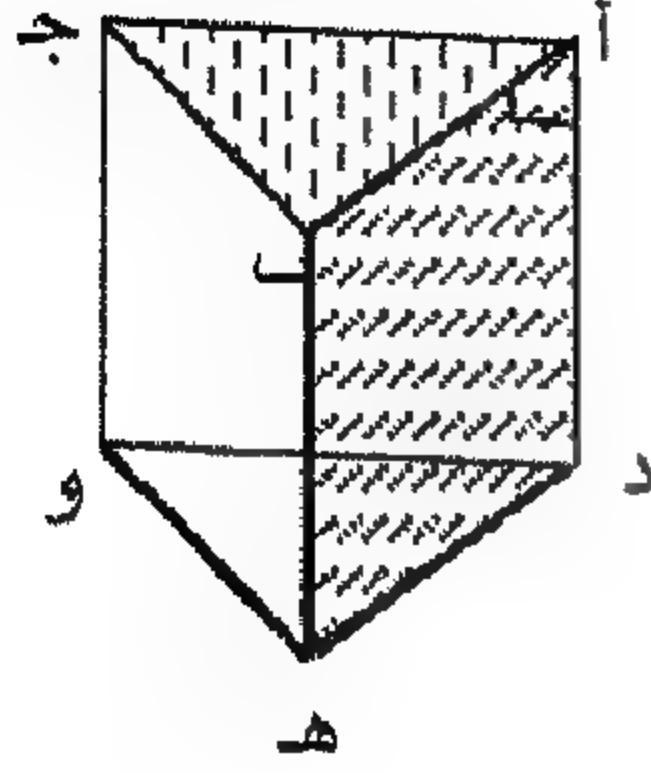
البيان: بما أن أ و \perp المستوى أ ب ج د





نظرية (٥)

إذا تعامد مستويان فالمستقيم في أحدهما والعمودي على خط تقاطعهما



يكون عمودي على المستوى الآخر كما في الشكل.

أ ب ج و هـ د موشور ثلاثي قائم.

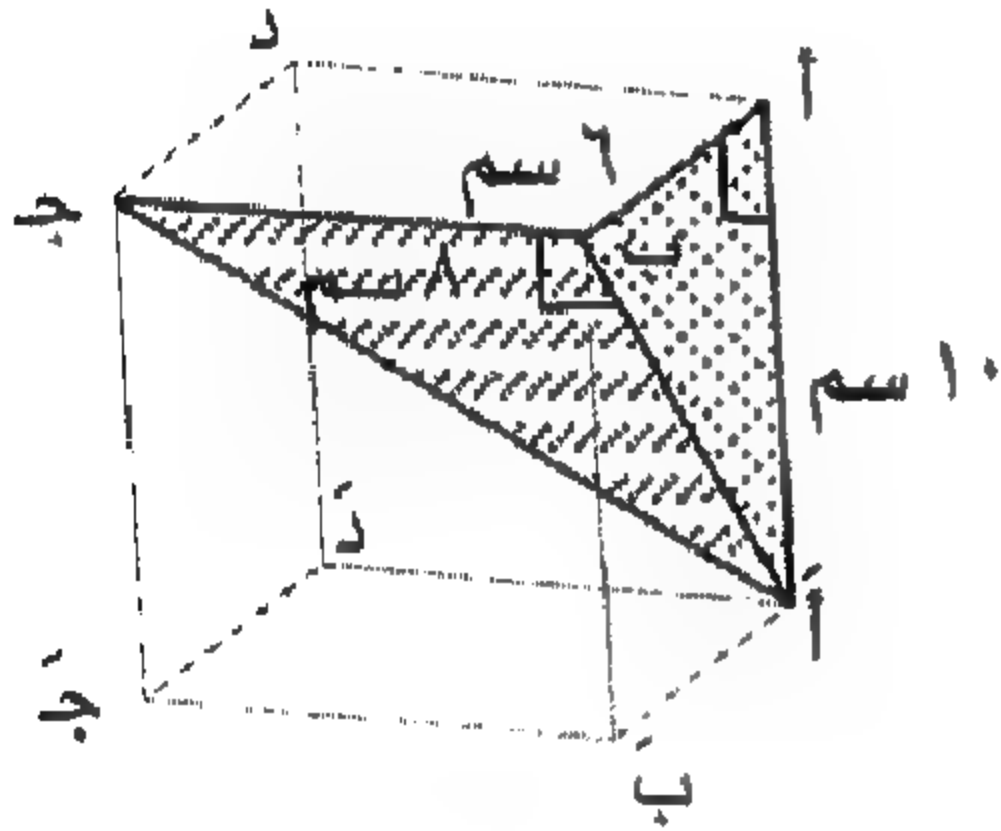
قيمة المستوى أ ب ج \perp المستوى أ د هـ ب

والمستقيم $\overleftrightarrow{أ د}$ في المستوى أ د هـ و وعمودي على خط التقاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$

$\therefore \overleftrightarrow{أ د} \perp$ المستوى أ ب ج.

مثال: أ ب ج د أ ب ج د متوازي مستطيلات كما في الشكل: احسب

طول قطره أ ج



نصل أ ب من فيثاغورس

$$^2(أ ب) + ^2(أ ب) = ^2(أ ج)$$

$$^2(6) + ^2(أ ب) = ^2(10)$$

$$(أ ب)^2 = 100 - 36 = 64 \text{ لكن } أ ب \perp \text{ ب ج كون } ب ج \perp \text{ المستوى}$$

أ أ ب الذي عموي أ ب.

\therefore فيثاغورس مرة أخرى

$$128 = 64 + 64 = ^2(8) + 64 = ^2(ب ج) + ^2(أ ب) = ^2(أ ج)$$

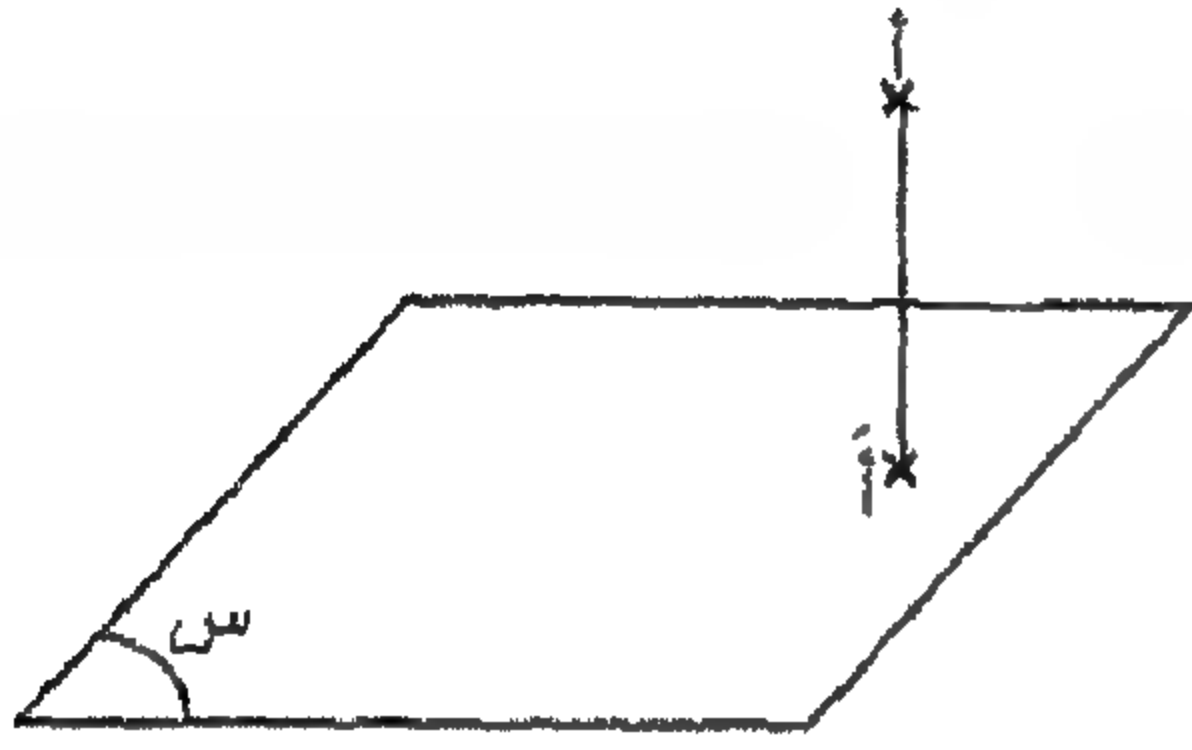
ومنها أ ج = $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ سم.



(٤) الإسقاط العمودي Perpendicular Projection

ونظرياته:

إن المسقط العمودي لنقطة مثل أ خارج مستوى مثل س هي النقطة أ الواقعة على المستوى س والناجمة عن تقاطع المستقيم المار بالنقطة أ والعمودي على المستوى س كما في الشكل.

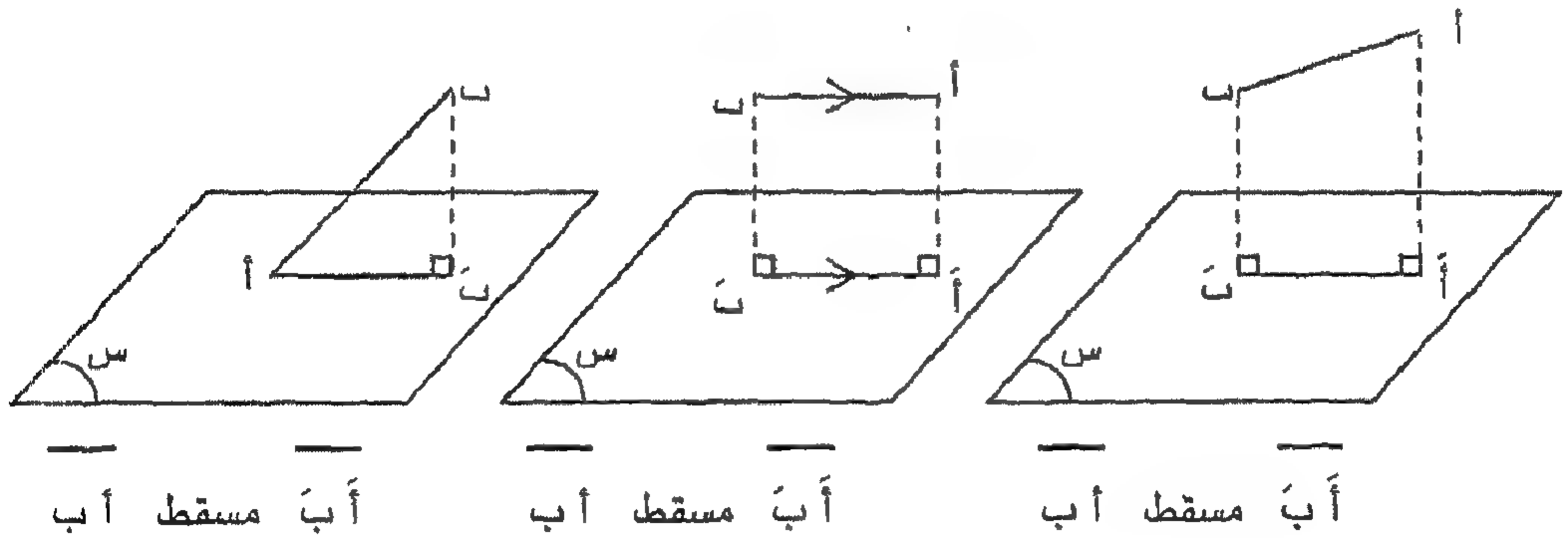


حيث النقطة أ هي المسقط العمودي

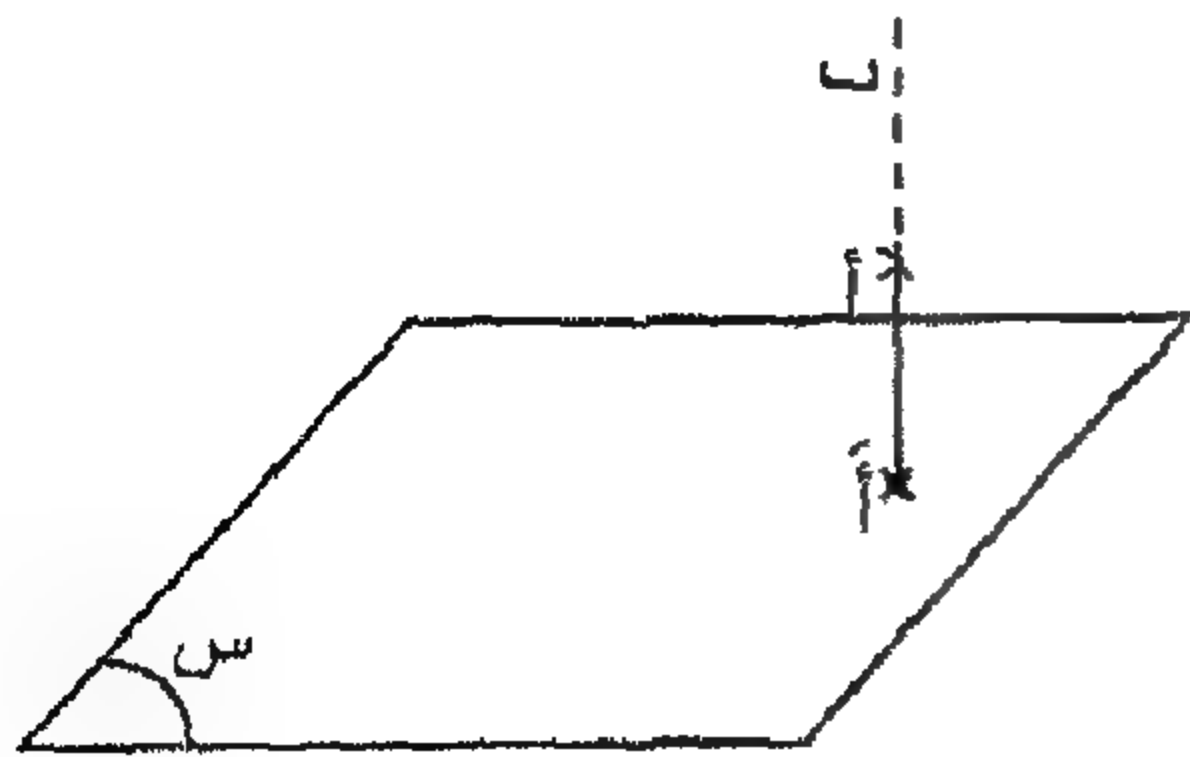
لنقطة أ

ومسقط قطعة مستقيمة مثل أ ب على

مستوى معلوم مثل س هو مجموعة المساقط العمودية للنقط المكونة للقطعة المستقيمة أ ب على المستوى س كما في الأشكال التالية ولعدة أوضاع:



ملحوظة هامة:

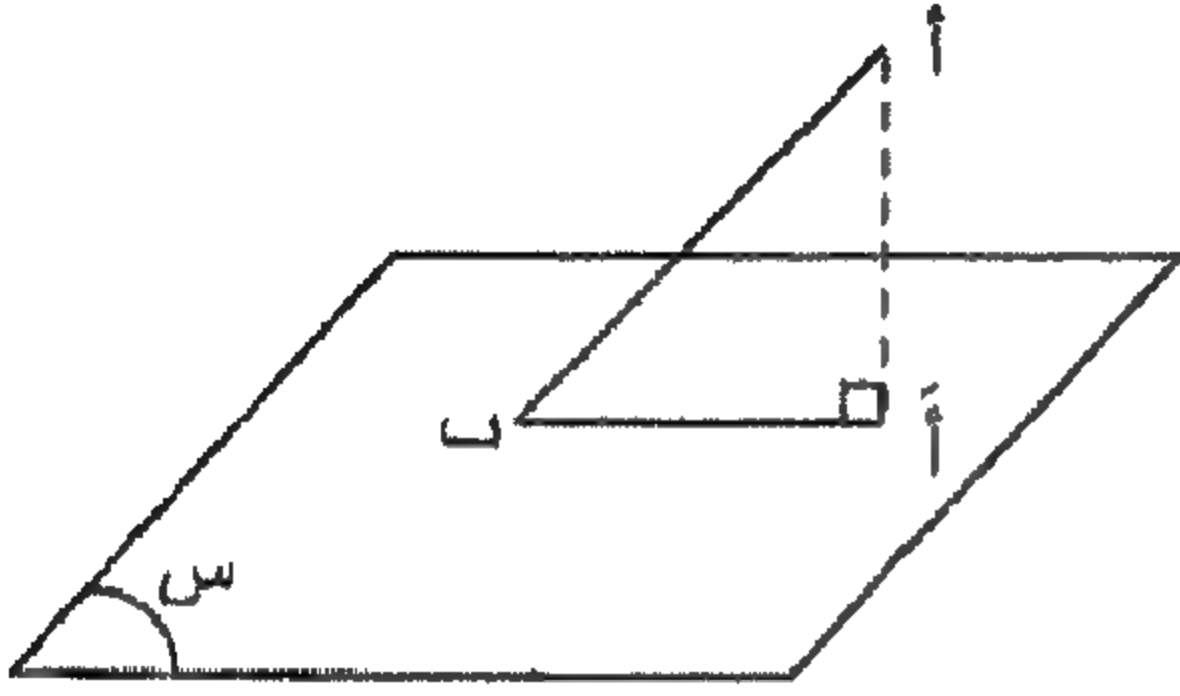


ويمكن ملاحظة أن مسقط نقطة هو نقطة ومسقط قطعة مستقيمة هو قطعة مستقيمة إلا في حالة واحدة عندما القطعة

المستقيمة تعامد المستوى فمسقطها نقطة ← ظهر كنقطة أ كما في الشكل أعلاه.

أ مسقط أ ب ، أ مسقط القطعة أ ب ⊥ المستوى س.

هذا وتسمى القطعة المستقيمة (أو المستقيم) الواصلة بين أي نقطة مثل أ خارج المستوى وأي من نقاط المستوى (عدا مسقط أ) مائلاً على المستوى كما في الشكل تسمى القطعة المستقيمة أ ب مائل على المستوى س.

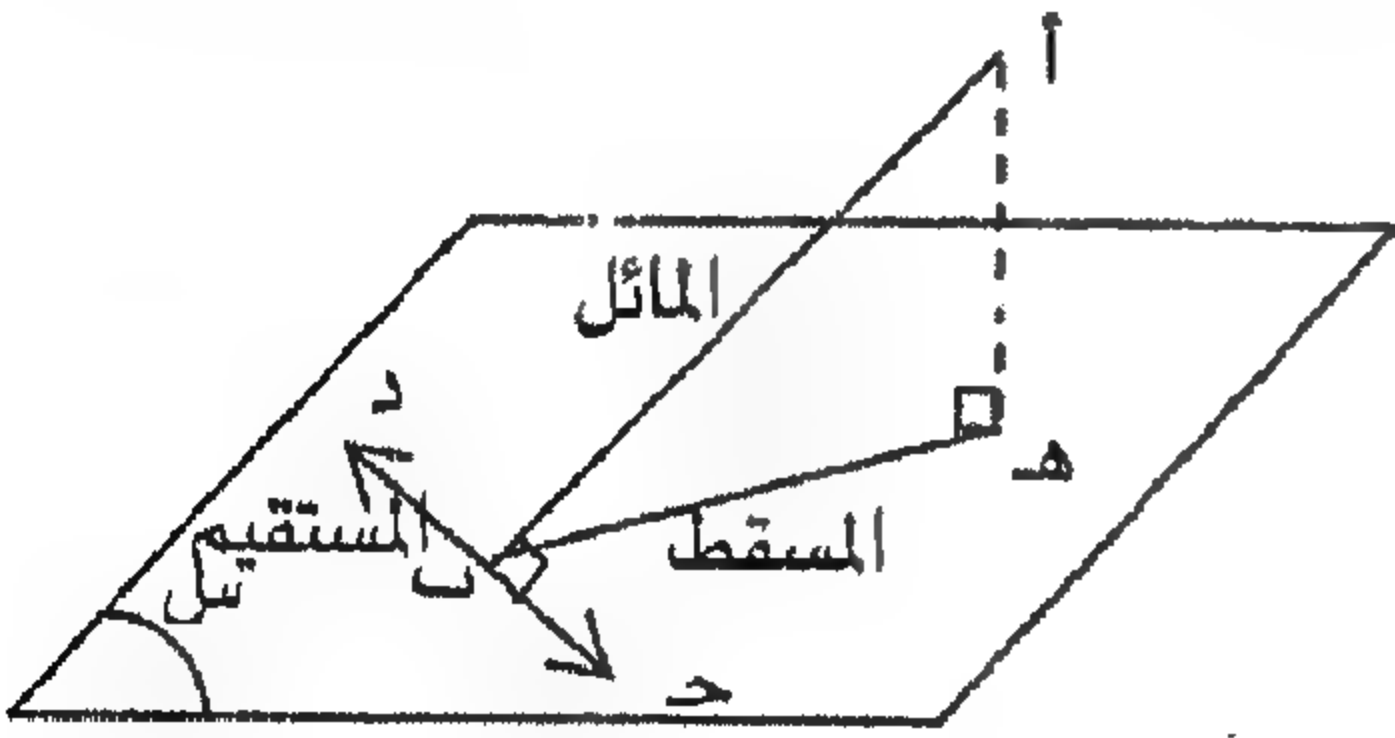


أي أن: $\overleftrightarrow{AA'} \perp \text{المستوى س}$
 \overleftrightarrow{AB} مائل على المستوى س.

نظرية ١:

«نظرية الأعمدة الثلاثة»

إذا مُدَّ مستقيم من نقطة خارج مستوى مثل أ ب ، وكان المستقيم المائل عمودياً على مستقيم في المستوى (مثل ج د) ، فإن مسقط المستقيم المائل يكون عمودياً على هذا المستقيم (مثل أ هـ)



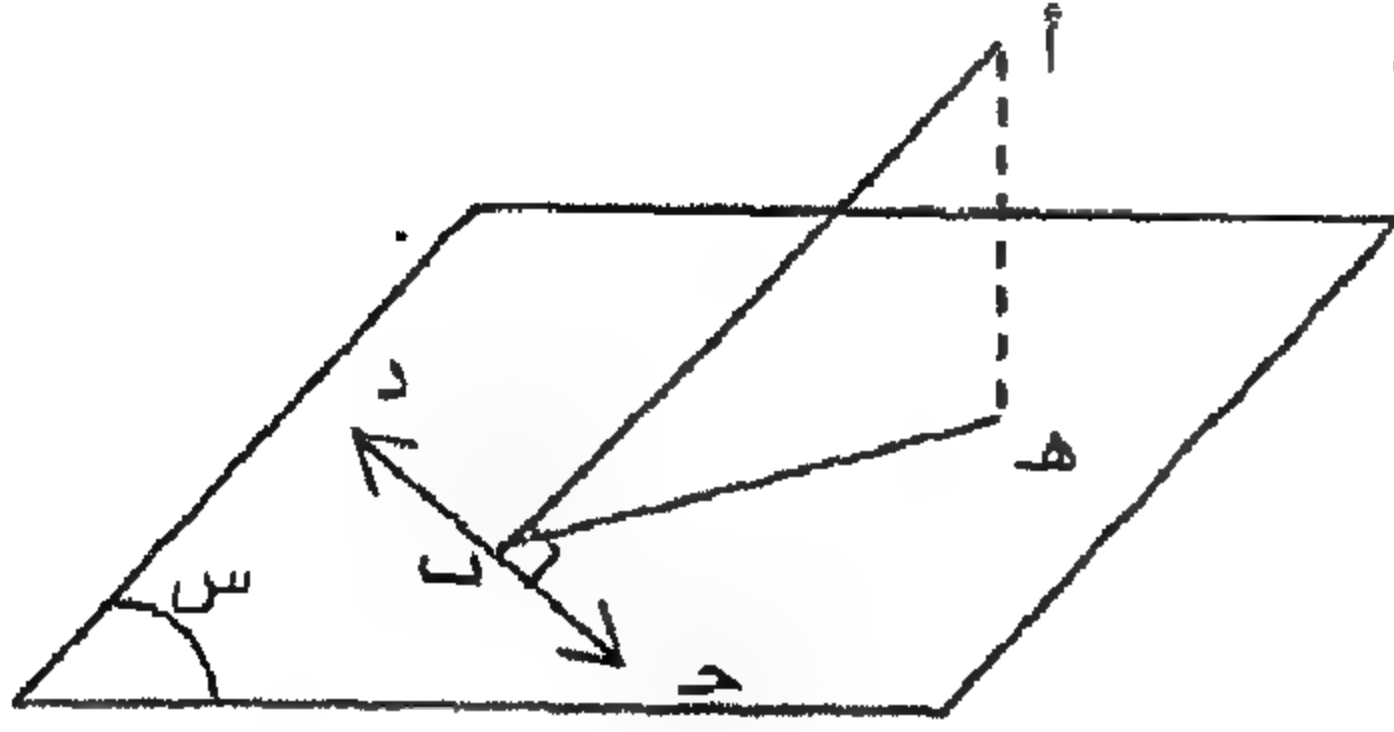
أي أن هـ ب ⊥ ج د
 أي أن المسقط ⊥ المستقيم ج د

«وعكس النظرية صواب»

وتقول:

إذا مُدَّ مستقيم مائل من نقطة خارج مستوى ليلقي مستقيماً معلوماً في

المستوى وكان مسقط المستقيم المائل عمودياً على المستقيم المعلوم فإن المستقيم المعلوم يكون عمودياً أيضاً على هذا المستقيم.



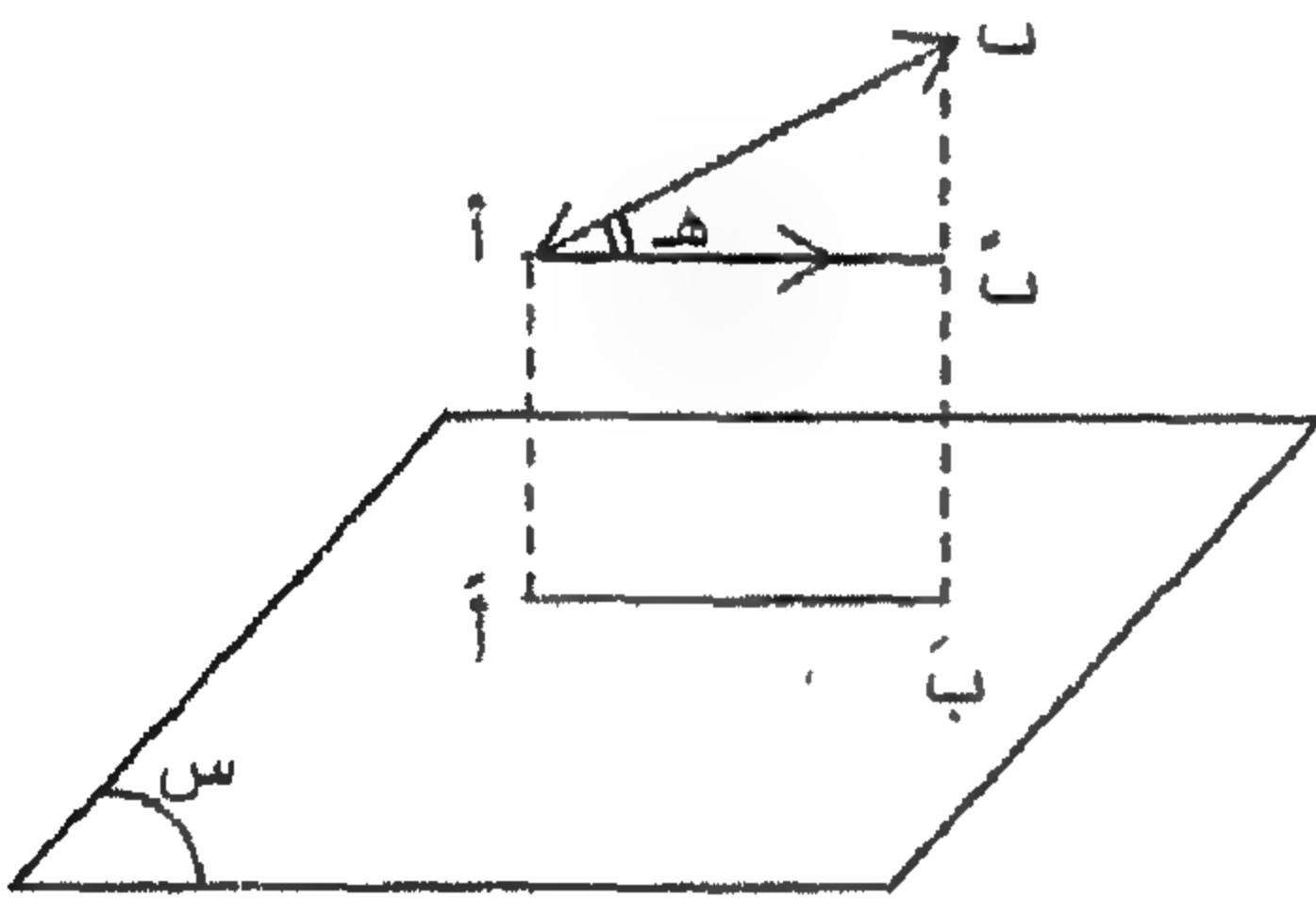
كما في الشكل

أي أن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$

أي أن المائل \perp المستقيم \overleftrightarrow{CD}

نظرية ٢ :

الزاوية بين مستقيم ومستوى هي الزاوية بين المستقيم ومسقطه العمودي على المستوى المذكور.



كما في الشكل

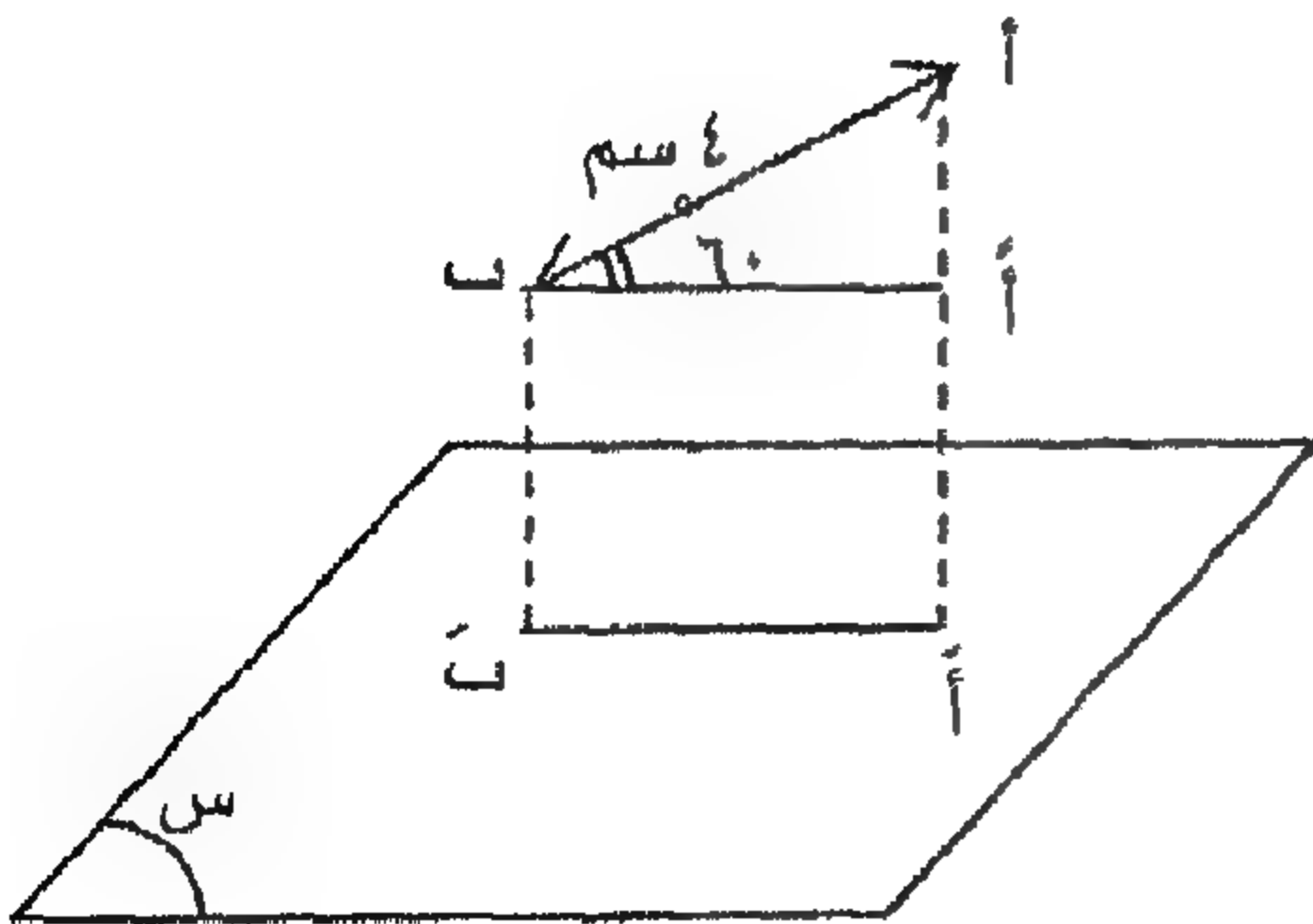
الزاوية بين المستقيم \overleftrightarrow{AB} والمستوى

س هي الزاوية بين \overleftrightarrow{AB} ، $\overleftrightarrow{AB'}$

وهي الزاوية

$\angle \overleftrightarrow{AB} \overleftrightarrow{AB'} \text{ حيث } \overleftrightarrow{AB'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\angle = \angle$



مثال: إذا كانت الزاوية بين

قطعة مستقيمة $AB = 4$ سم وبين مستوى س

هي 60° احسب طول مسقط القطعة على

المستوى AB' .

$\overleftrightarrow{AB'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$$\frac{أب}{٤} = \frac{أب}{أب} = \text{جتا } ٦٠^\circ$$

$$\frac{أب}{٤} = \frac{١}{٢} \text{ أي أن}$$

$$\therefore ٢ أب = ٤$$

$$أب = \frac{١}{٢} = ٢ \text{ سم فقط.}$$

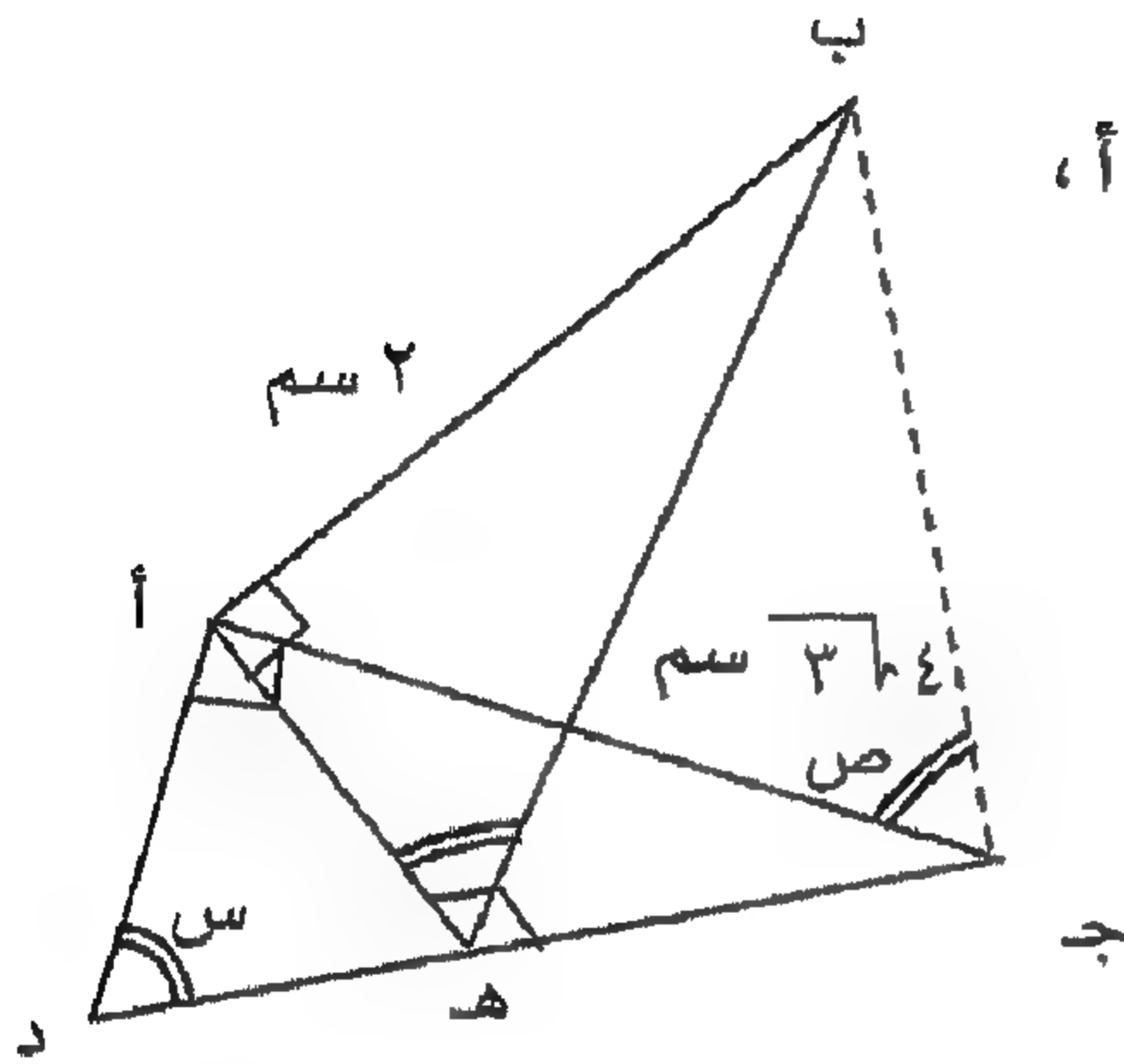
مثال: أ ج د مثلث قائم الزاوية في أ،

والمستقيم $\overleftrightarrow{أب} \perp$ مستوى المثلث

إذا كان $أب = ٢$ سم

$$أ ج = ٤ \sqrt{٣} \text{ سم}$$

$$أ د = ٤ \text{ سم}$$



جد قياس الزاوية الزوجية (ب، ج د ، أ)

الحل:

نسقط من أ العمود أ هـ على ج د ، نصل ب هـ

أ هـ مستقيم في المستوى س وعمودي على أ ج د

ب هـ مستقيم في المستوى ص وعمودي على المستوى فهو عمودي على ج د أيضاً.

"عكس النظرية"

لذا تكون الزاوية أ هـ ب هي قياس الزاوية الزوجية (ب، ج د ، أ)

والمثلث هـ أ ب قائم الزاوية في أ



لذا فإن $(ب هـ)^2 = (أ هـ)^2 + (أ ب)^2$ (فيثاغورس)

لكن لإيجاد $(أ هـ)^2$ نجد جد أولاً.

$$١٦ + ٤٨ = (٤)^2 + (\sqrt{٣} \times ٤)^2 = (أ د)^2 + (أ ج)^2 = (جد)^2$$

$$\sqrt{٦٤} = ٨ \text{ سم.}$$

لكن مساحة المثلث أ ج د نجدها ونبين كما يلي:

$$\text{مساحة أ ج د} = \frac{١}{٢} \times أ ج \times أ د = \frac{١}{٢} \times ج د \times أ هـ$$

(المساحة = نصف القاعدة \times الارتفاع)

$$\sqrt{٣} \times ٢ = \frac{٤ \times \sqrt{٣} \times ٤}{٨} = أ هـ \leftarrow أ هـ \times ٨ = ٤ \times \sqrt{٣} \times ٤$$

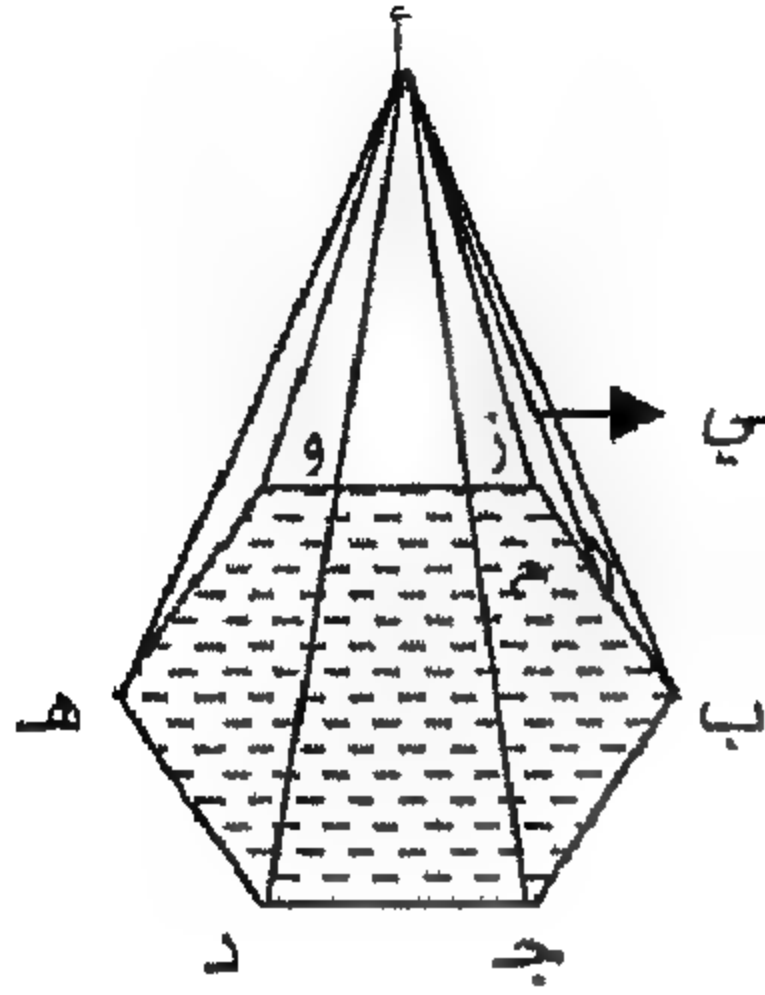
$$\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣} \times ٢} \quad \text{والآن ظا (أ هـ ب)}$$

$$\therefore \angle أ هـ ب = ٣٠^\circ = \frac{\pi}{٦} \quad \text{(وهو قياس الزاوية الزوجية المطلوبة)}$$





(١٤ - ٥) أمثلة محلولة على الهندسة الفضائية



مثال ١: ما المساحة الجانبية لهرم

سداسي قائم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه

الجانبية ٢ سم ؟

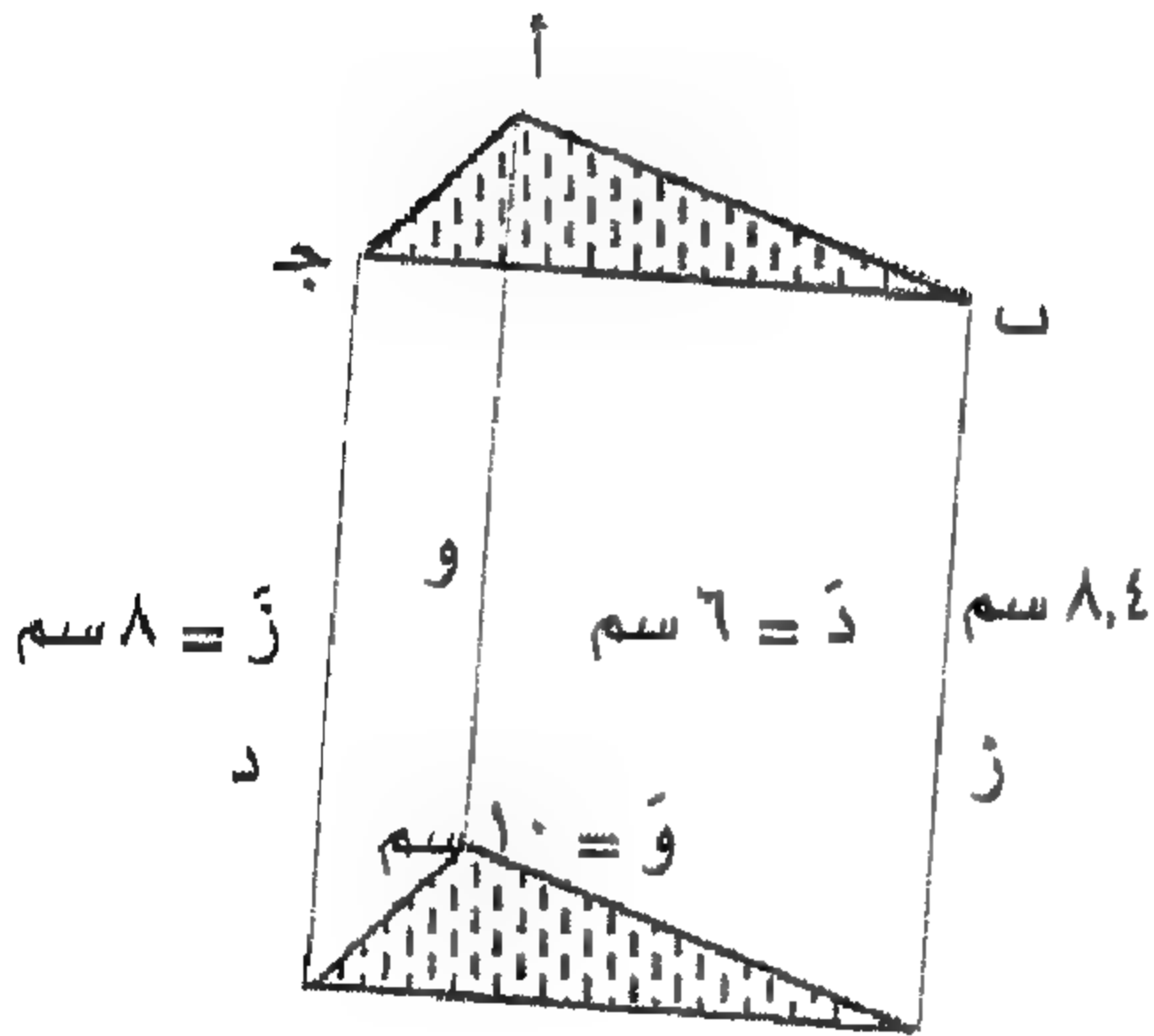
المساحة الجانبية للهرم = $\frac{1}{2}$ محيط

القاعدة \times الارتفاع الجانبي

وحيث أن د سم = ١٠ سم

فإن أ م الارتفاع الجانبي = $٢ \times ١٠ = ٢٠$ سم

\therefore المساحة الجانبية للهرم = $(\frac{1}{2}) (٣٦) (٢٠) = ٣٦٠$ سم^٢



مثال ٢: موشور ثلاثي قاعدته

مثلث أطوال أضلاعه ٦ سم ، ٨ سم ، ١٠

سم وارتفاعه ٨,٤ سم احسب حجمه

ومساحته الجانبية والكلية.

نجد أولاً مساحة القاعدة = مساحة

المثلث بمعرفة أطوال أضلاعه

$$\text{المساحة} = \sqrt{ح (ح - د) (ح - و) (ح - ب)}$$

$$\text{حيث ح} = \frac{و + ز + د}{2} \text{ نصف المحيط}$$

$$= \frac{٦ + ٨ + ١٠}{2} = ١٢ \text{ سم}$$



$$\sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = \text{مساحة المثلث د ب و}$$

$$= \sqrt{(12)(2)(4)(6)}$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}$$

$$= 24 \text{ سم}^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

∴ حجم الموشور = محيط القاعدة × الارتفاع

$$= (6 + 8 + 10) (4, 8)$$

$$= (24) (4, 8) = 201,6 \text{ سم}^2$$

المساحة الكلية = الجانبية + مساحة القاعدتين

$$= 201,6 + (24) 2$$

$$= 249,6 \text{ سم}^2 = (201,6 + 48)$$

مثال ٣: س، ص مستويان متقاطعان في المستقيم م ؟ كما في

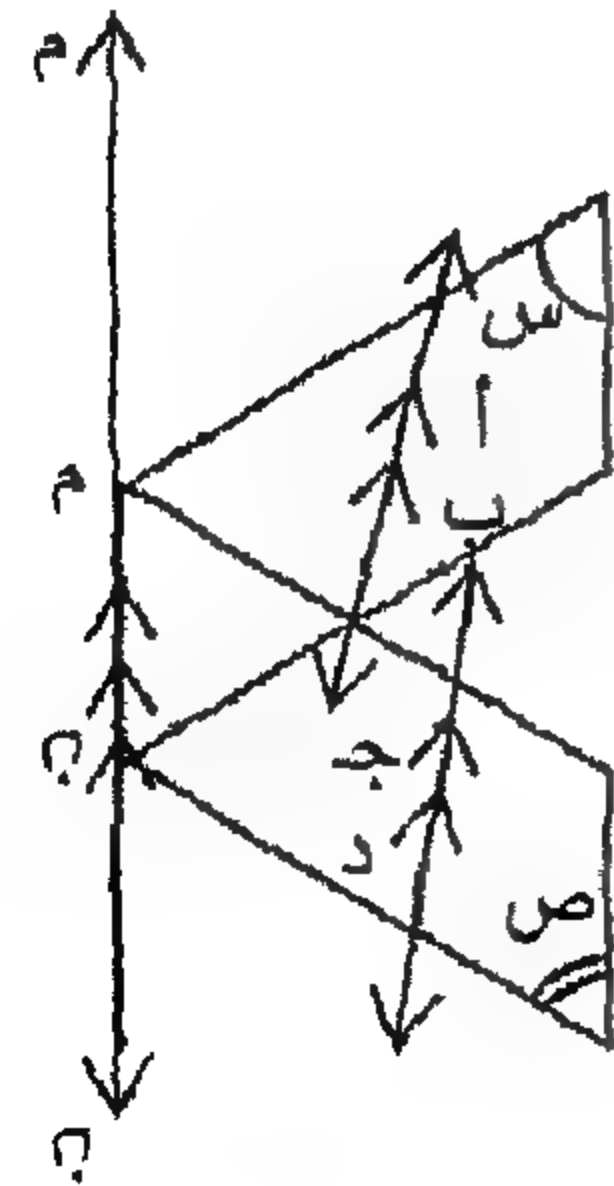
الشكل رُسم المستقيم \overleftrightarrow{AB} في المستوى س موازياً للمستوى ص كما في رسم المستقيم \overleftrightarrow{CD} في الـ مستوى ص موازياً للمستوى س.

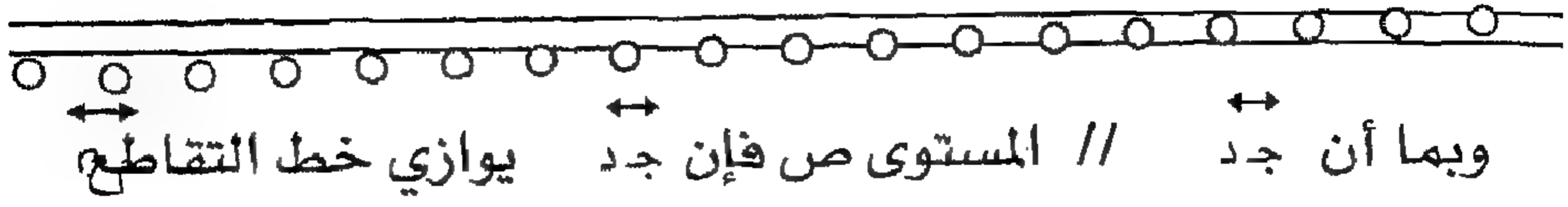
بين أن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

الحل: بما أن $\overleftrightarrow{AB} \parallel$ المستوى س فإن

$\overleftrightarrow{AB} \parallel$ يوازي خط التقاطع م ؟

∴ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (١)

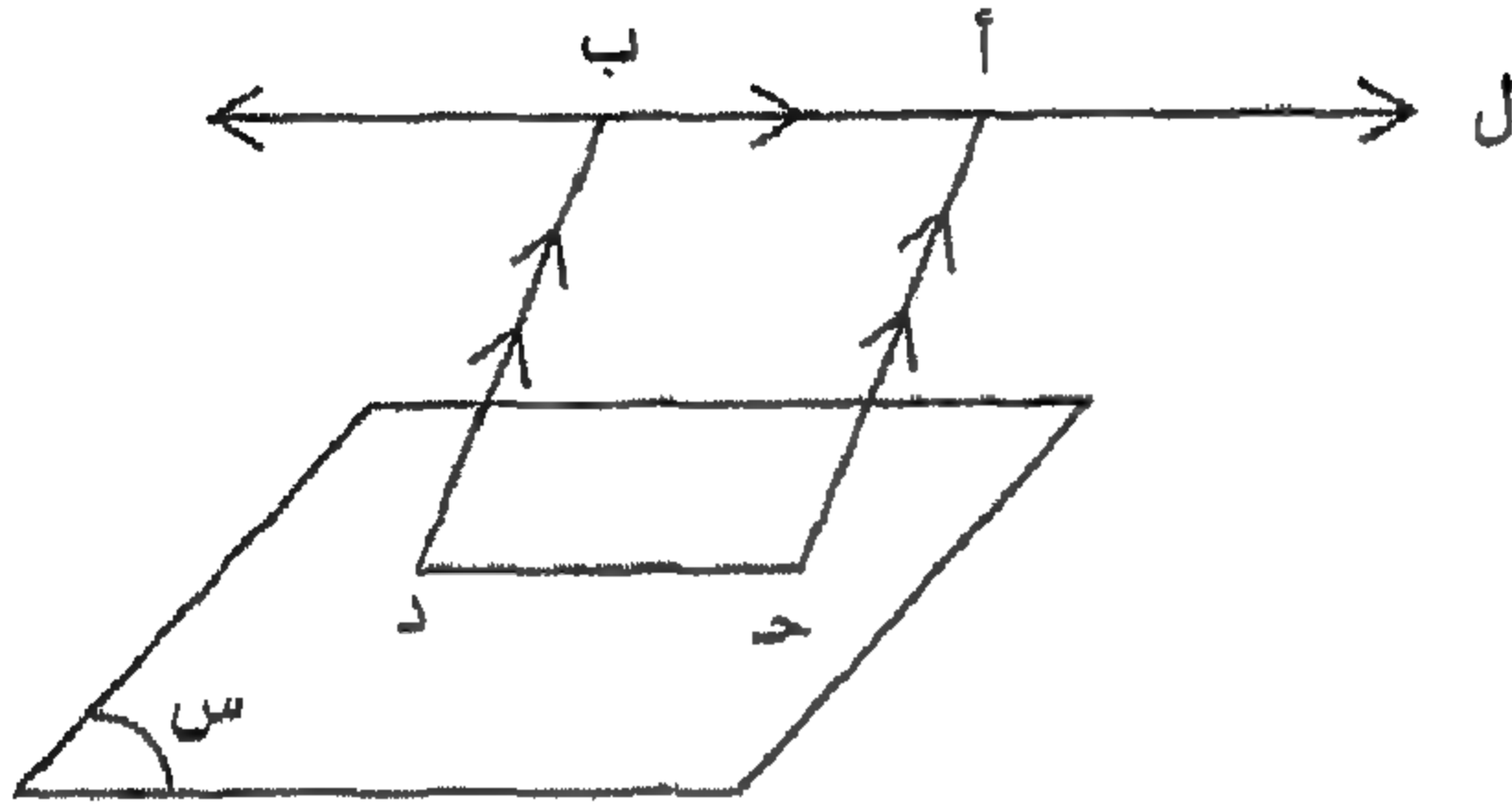




وبما أن ج د // المستوى ص فإن ج د // المستوي م ؟ (٢)

من (١)، (٢) فإن أ ب // ج د وهذا المطلوب بيانه

مثال ٤: أ، ب نقطتان



على مستقيم يوازي المستوى س،
مر بالنقطتين مستقيمان متوازيان
قطعا المستوى في النقطتين ج، د
بين لماذا أ ج = ب د، أ ب = ج د

الحل:

حيث أن ل // المستوى س

فإن أ ب // أي مستقيم في المستوى س

∴ أ ب // ج د

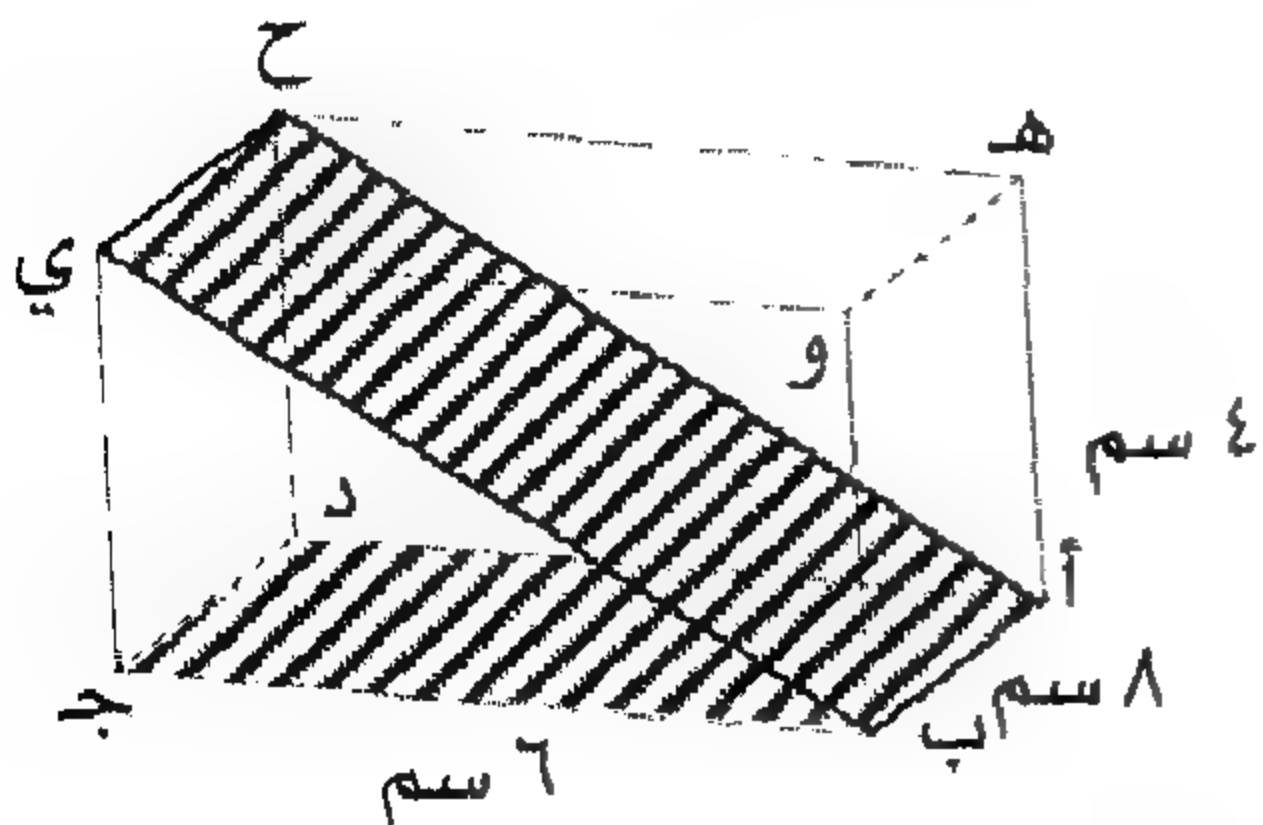
لكن أ ج // ب د من المعطيات

∴ الشكل أ ج د ب متوازي أضلاعه

ومن خواصه «كل ضلعين متقابلين متساويين» لذا فإن أ ج = ب د، أ ب =

ج د

مثال ٥: الشكل المجاور يمثل متوازي مستطيلات أ ب ج د هـ و ي ح فيه



أ ب = ٨ سم، ب ج = ٦ سم، أ ج = ٤ سم.

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين

المستويين أ ب ج، أ ب ح



الحل: الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب ج، أ ب ح هي الزاوية.

ح ← أ ب ← ج ومنها

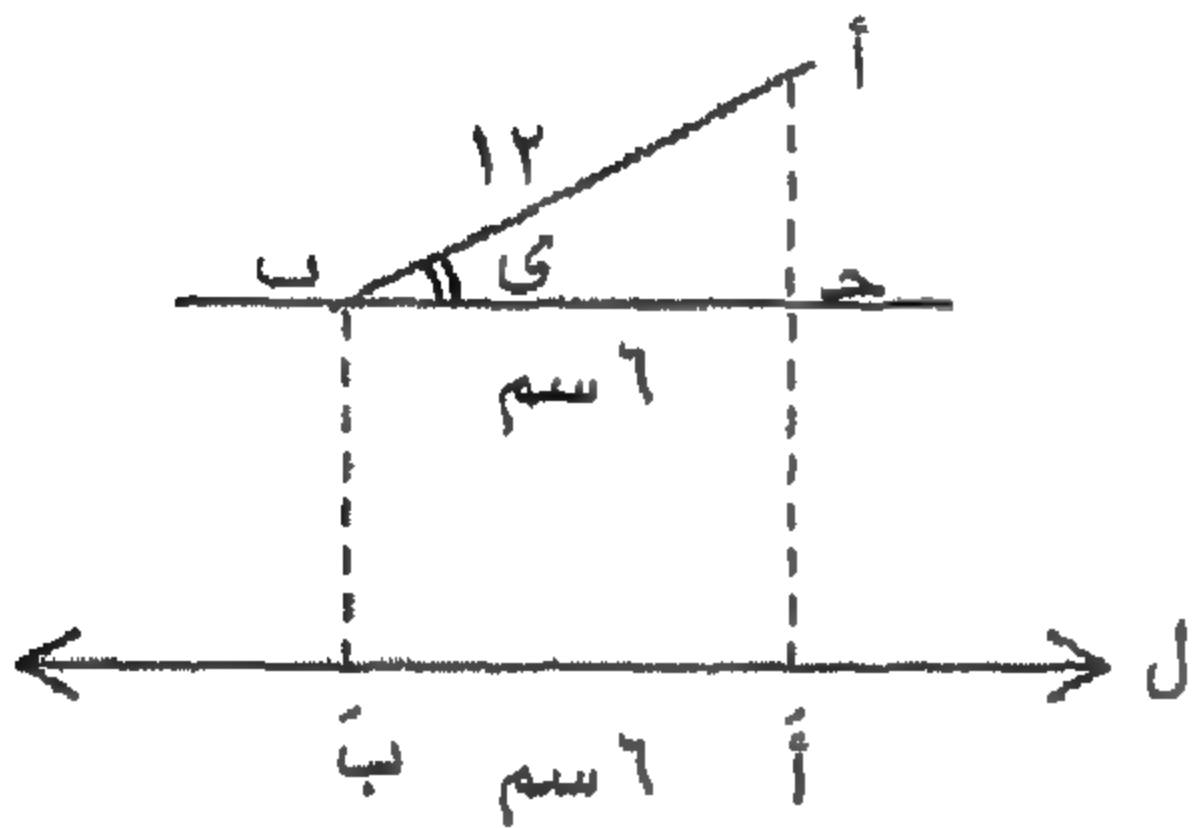
$$\frac{\text{ج ي}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \text{ظا الزاوية الزوجية}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0.6667 \text{ ومنها قياس الزاوية}$$

الزوجية = 33.5° بواسطة الآلة الحاسبة.

مثال ٦: أ ب قطعة مستقيمة طولها ١٢ سم وطول مسقطها أ ب على

مستقيم ما هو ٦ سم.



احسب الزاوية بين القطعة أ ب

ومسقطها أ ب

الحل:

نرسم من ب مستقيماً يوازي ل

$$\therefore \text{ب ج} = 6 \text{ سم}$$

وحيث \angle ي هي المحصورة بين القطعة أ ب والمستقيم ل فإن:

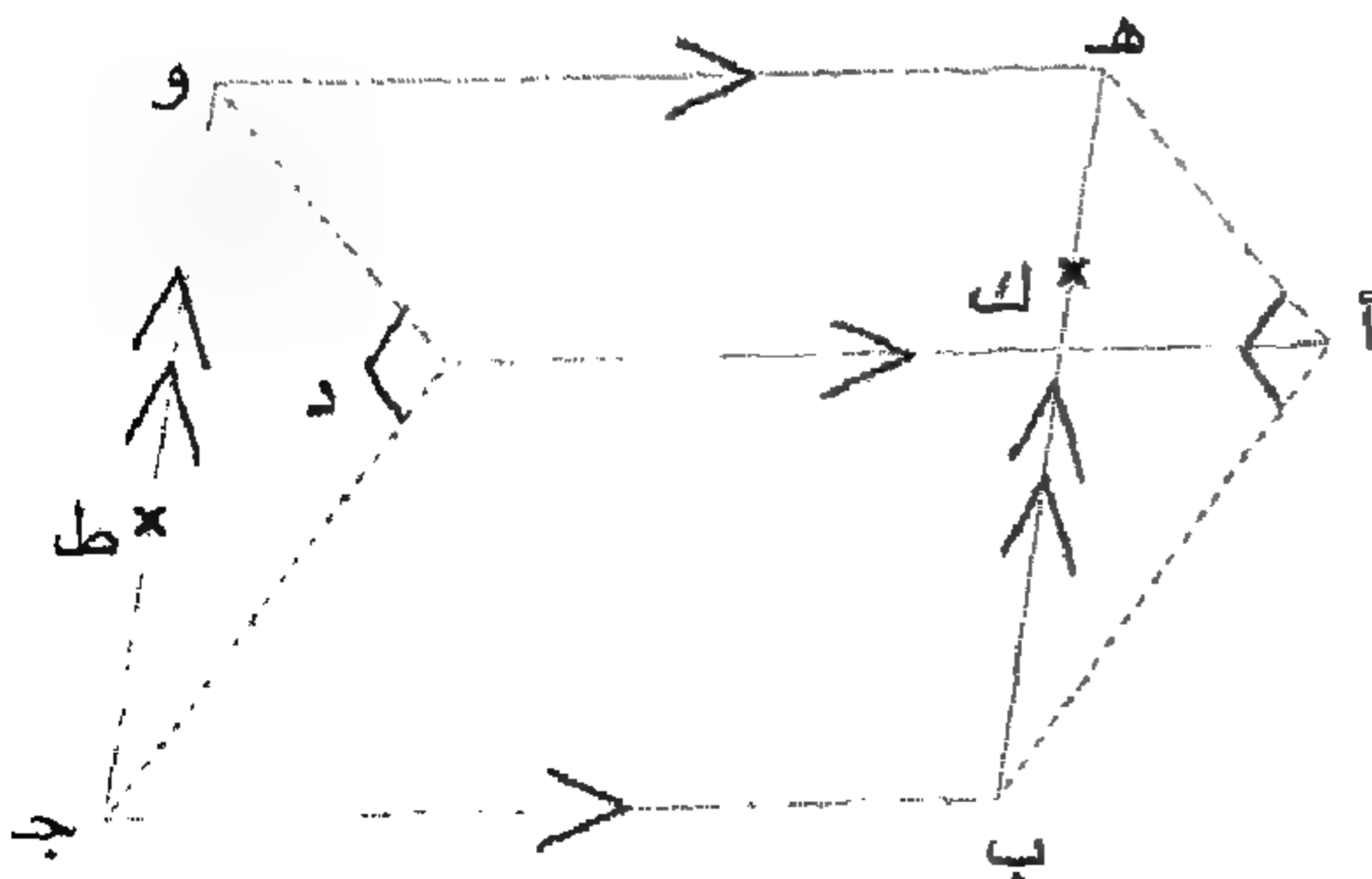
$$\frac{1}{2} = \frac{6}{12} = \frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}}$$

\therefore ي = 60° الزاوية المحصورة بين القطعة ومسقطها.

مثال ٧: اعتماداً على

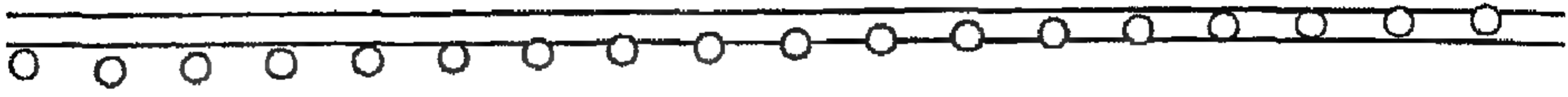
الشكل المجاور أجب بنعم أو لا

فقط.



«١» النقاط أ، ب، ه مستقيمة.

الجواب ← لا



«٢» النقط أ، ب، ك مستوية

الجواب ← نعم

«٣» المستقيمان ب هـ، ج د متوازيان

الجواب ← لا

«٤» المستقيمان أ هـ، ج د متوازيان

الجواب ← نعم

«٥» المستقيمان أ د، ج هـ متخالفان

الجواب ← نعم

⇐ مثال ٨: أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٢ ب ج، أقيم من ج

عموداً على مستوى المثلث وعُينت

عليه النقطة د بحيث أن

$$ج د = ٢ ب ج$$

$$بين أن أ د = ٣ ب ج$$

بما أن د ج ⊥ المستوى

أ ب ج

∴ المثلث أ ج د قائم

الزاوية في ج

وعليه فإن

$$(أ د)^2 = (أ ج)^2 + (د ج)^2 \text{ (فيثاغورس)}$$

$$\text{لكن } (أ ج)^2 = (أ ب)^2 + (ب ج)^2 \text{ (فيثاغورس)}$$



$$^2(2 \text{ ب ج}) + ^2(2 \text{ ب ج}) = ^2(2 \text{ ب ج}) + ^2(2 \text{ ب ج}) =$$

$$\therefore ^2(أ د) = ^2(2 \text{ ب ج}) + ^2(2 \text{ ب ج}) =$$

$$\text{لكن } ^2(أ د) = ^2(2 \text{ ب ج}) = ^2(2 \text{ ب ج})$$

$$\therefore ^2(أ د) = ^2(2 \text{ ب ج}) + ^2(2 \text{ ب ج}) = ^2(2 \text{ ب ج})$$

$$\therefore \sqrt{^2(2 \text{ ب ج})} \times \sqrt{^2(2 \text{ ب ج})} = \sqrt{^2(2 \text{ ب ج})} = أ د$$

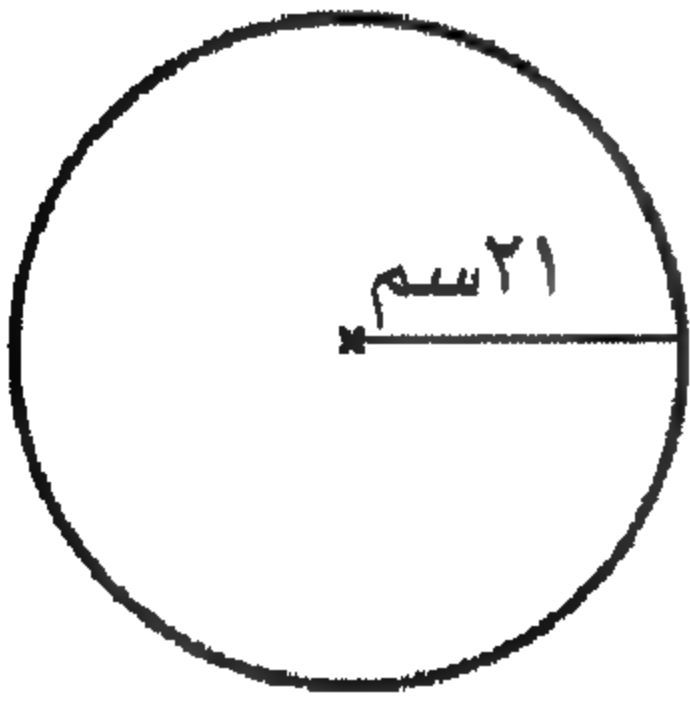
$$= 3 \text{ ب ج} \quad \text{وهو المطلوب بيانه}$$

مثال ٩: ما حجم (١) كرة نصف قطرها ٢١ سم ؟

(٢) قطاع كروي فيها ارتفاعه ١٥ سم ؟

(٣) قطعة كروية فيها ارتفاعها ٦ سم ؟

$$\text{اعتبر } \pi = \frac{22}{7}$$

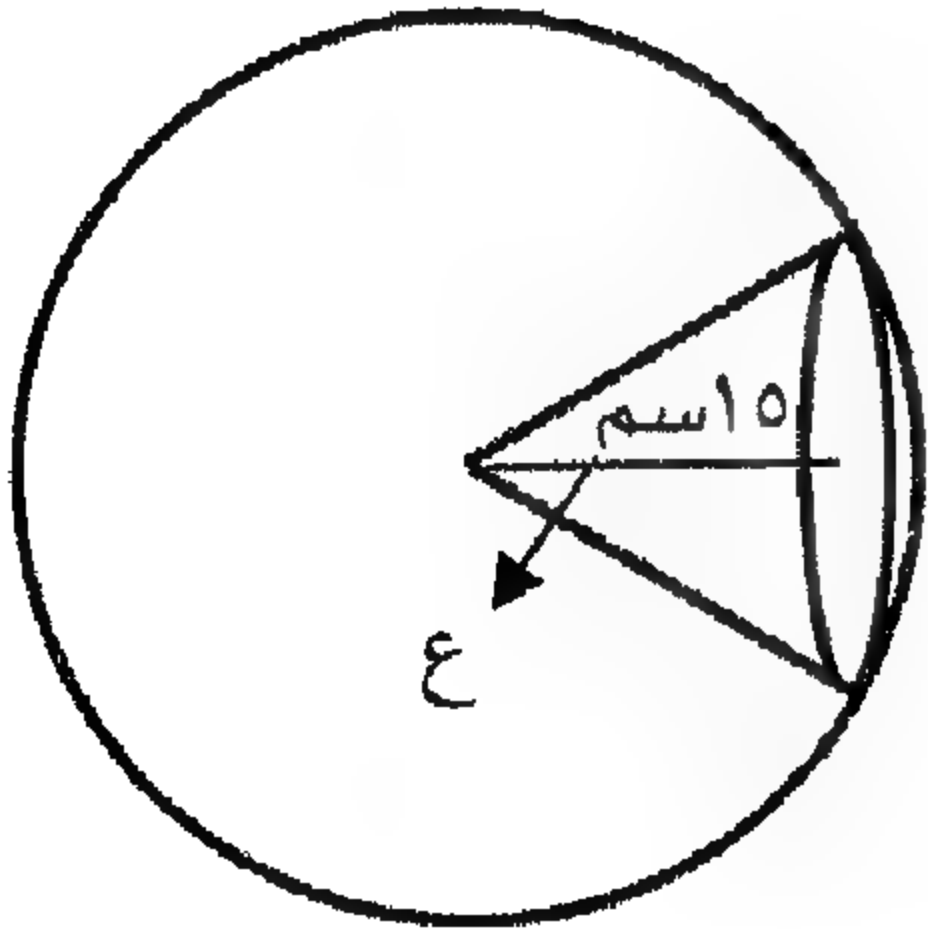


$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

$$= \left(\frac{22}{7} \right) (21)^3 \left(\frac{4}{3} \right) =$$

$$= \left(\frac{22}{7} \right) (21) (21) (21) \left(\frac{4}{3} \right) =$$

$$= (84) (462) = 38808 \text{ سم}^3$$



$$\text{حجم القطاع الكروي} = \frac{2}{3} \pi \text{ نق}^2 ع$$

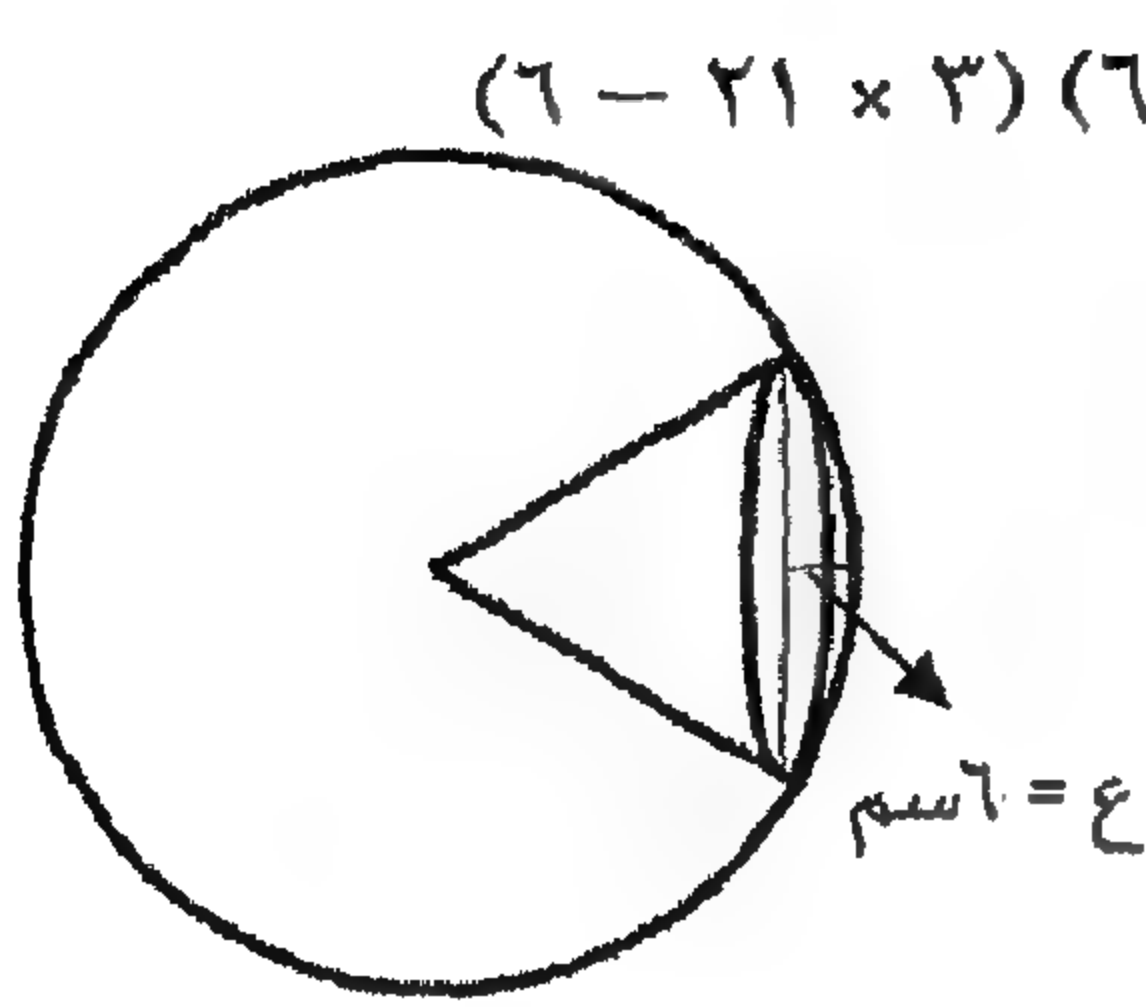
$$= \left(\frac{22}{7} \right) (21)^2 \left(\frac{2}{3} \right) =$$

$$= (44) (315) = 13860 \text{ سم}^3$$





حجم القطعة الكروية = $\frac{1}{3} \pi e^2 (3 - \text{نق} - e)$



$$(6 - 21 \times 3) (6) (6) \left(\frac{22}{7} \right) \left(\frac{1}{3} \right) =$$

$$\frac{(6 - 63) (36) (22)}{21} =$$

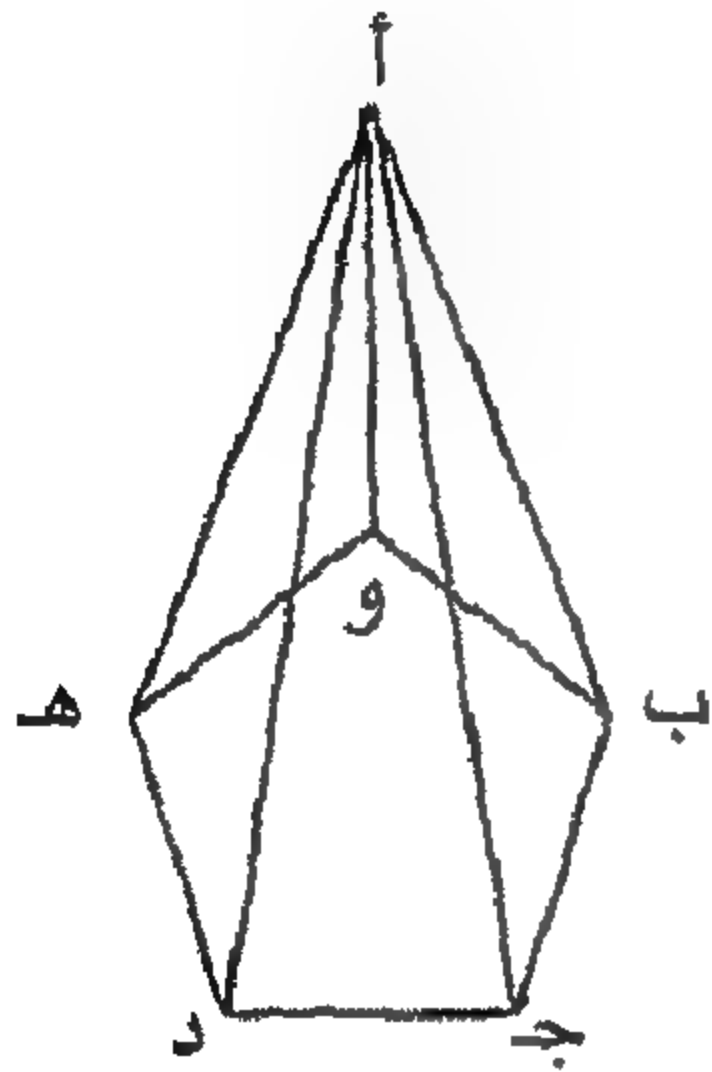
$$\frac{(57) (36) (22)}{21} =$$

$$\frac{15048}{7} =$$

$$= 2149,7 \text{ سم}^3$$

مثال ١٠: الشكل يمثل هرمًا خماسيًا قائمًا

أعط مثالاً واحداً على كل من



(١) مستقيمين متقاطعين

الجواب ← أ ب، أ ج

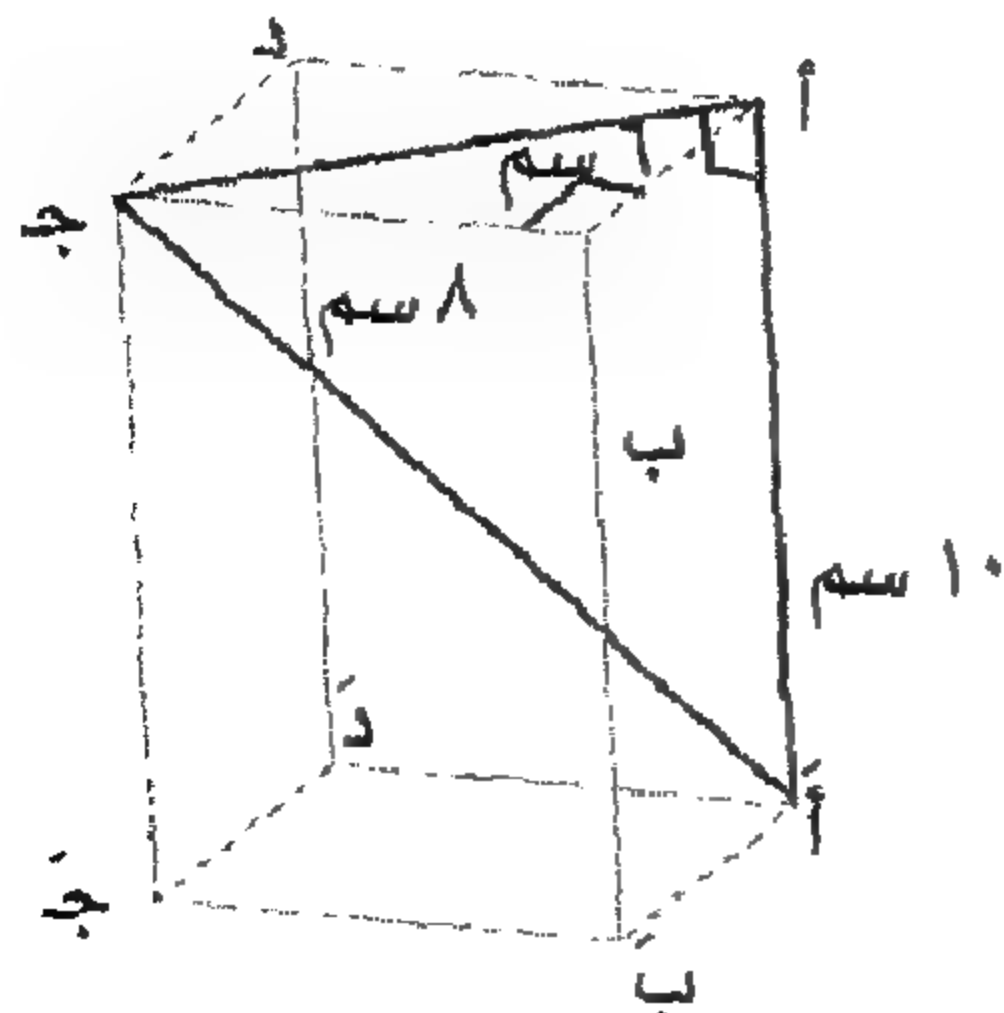
(٢) مستقيمين متخالفين

الجواب ← ج د، أ و

(٣) مستقيمين متوازيين

الجواب ← لا يوجد

مثال ١١: أ ب ج د أ ب ج د متوازي مستطيلات فيه أ أ = ١٠ سم، أ ب

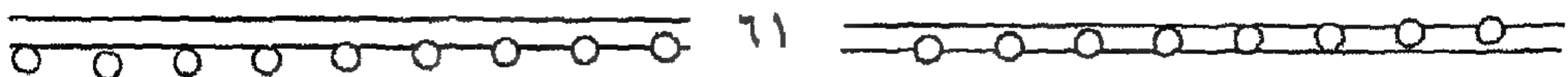


$$= 6 \text{ سم، ب ج} = 8 \text{ سم}$$

احسب طول قطره أ ج

الحل: نصل أ ج

بما أن أ أ \perp المستوى أ ب ج د





مثال ١٣: أيهما أكبر حجماً؛ اسطوانة نصف قطر قاعدتها ١٤ سم وارتفاعها ٧ سم أم مكعب طول ضلعه ١٦,٥ سم ؟ اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$

الحل: نجد حجم كلا منها:

$$\text{حجم الاسطوانة} = \pi r^2 h = \pi (14)^2 (7) =$$

$$= 7 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 =$$

$$= (22) (196) = 4312 \text{ سم}^3$$

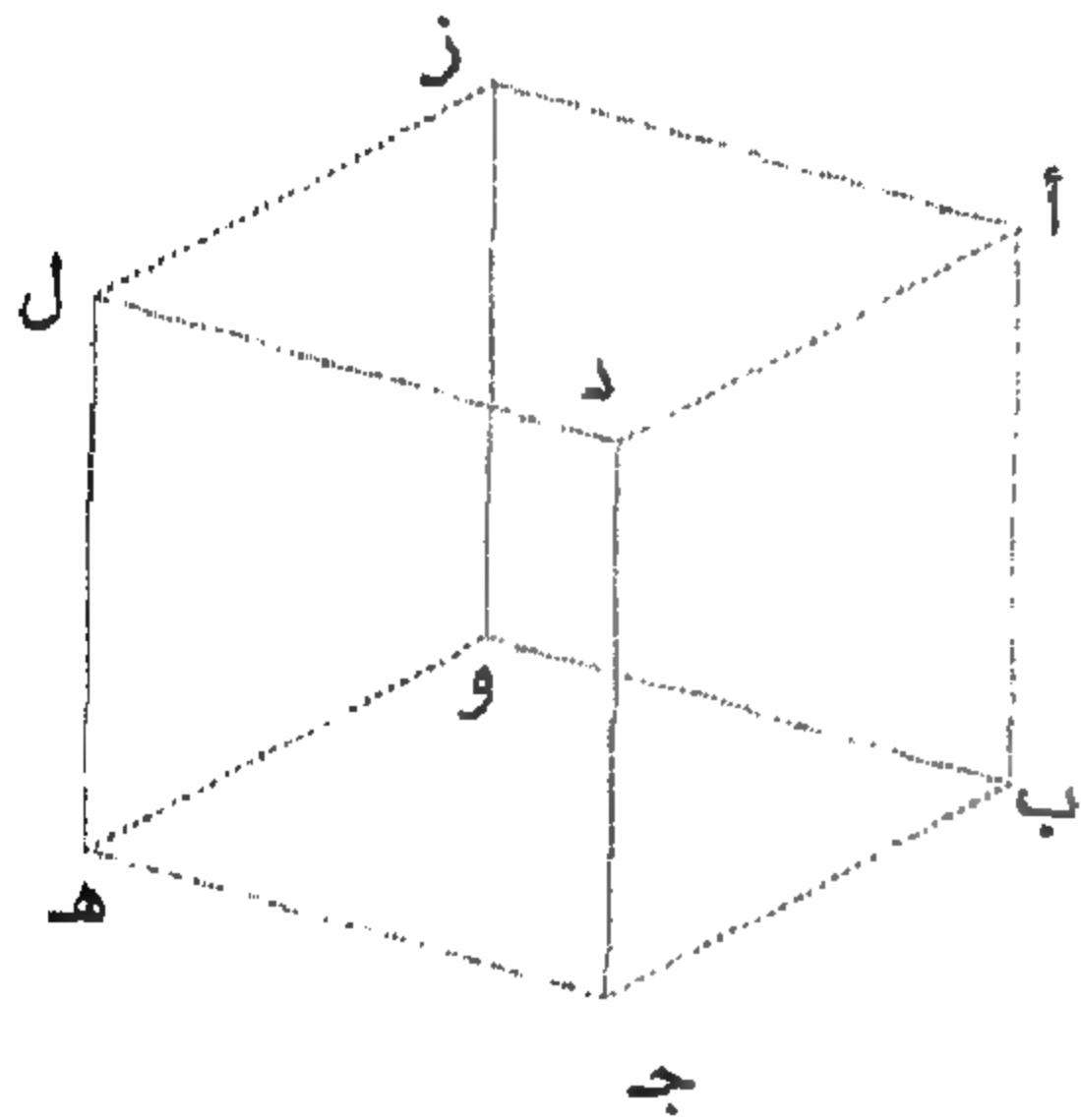
$$\text{حجم المكعب} = (\text{الضلع})^3 = (16,5)^3$$

$$= (16,5) (16,5) (16,5) = 4492,125 \text{ سم}^3$$

∴ حجم المكعب أكبر

مثال ١٤: من الشكل المجاور والذي يمثل متوازي مستطيلات أذكر

أسماء:



(١) مستويين متوازيين

الجواب: أ ب و د، ز و هـ ل

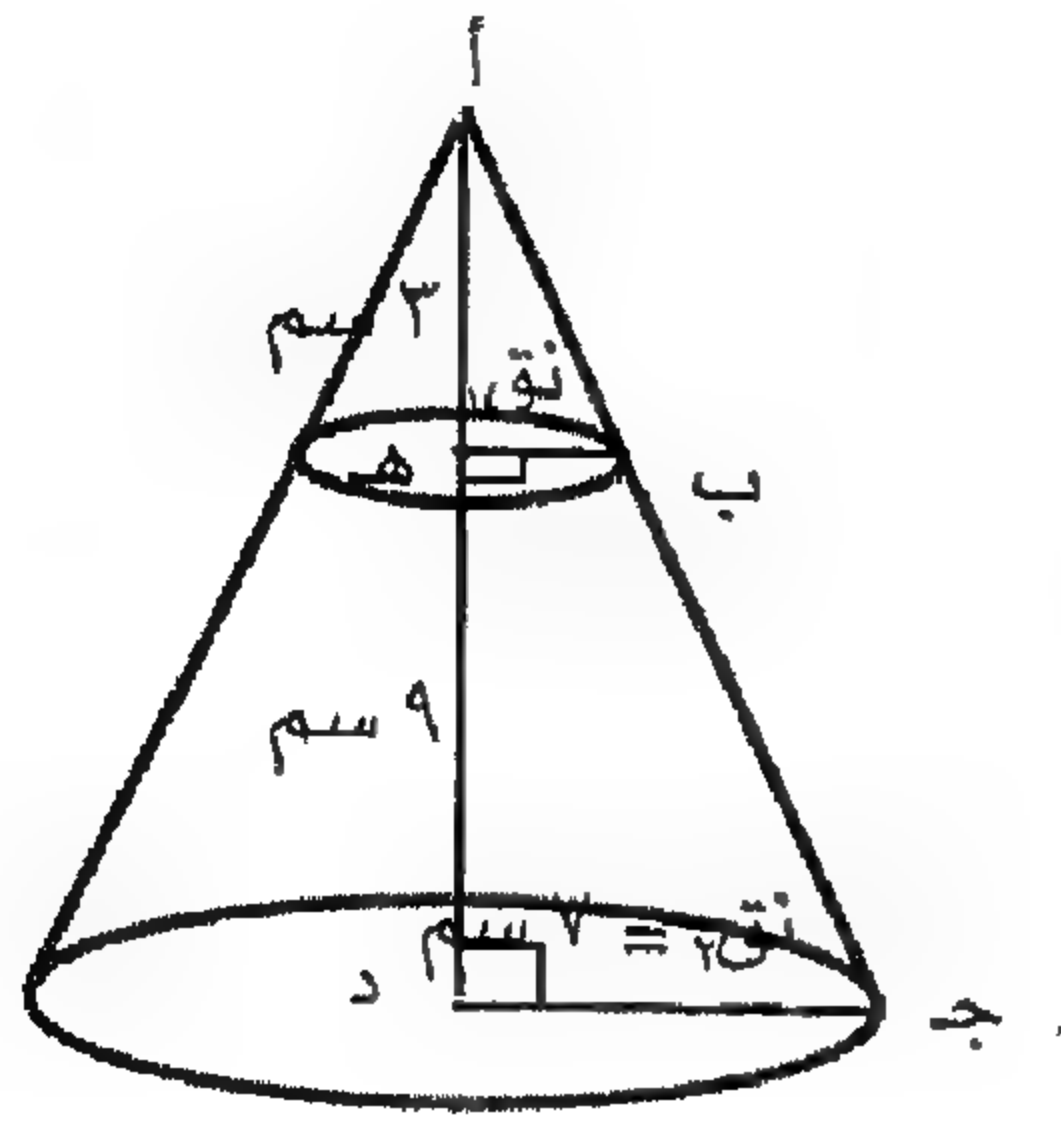
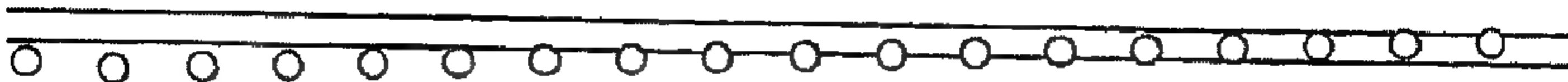
(٢) مستويين متعامدين

الجواب: أ د ل ز، أ ب ج د

مثال ١٥: مخروط قائم ارتفاعه ١٢ سم ونصف قطر قاعدته ٧ سم قُطع بمستوى يوازي قاعدته ويبعد عنها ٩ سم أوجد حجم المخروط القائم الناقص الناتج

$$\text{المميز} = \pi \frac{22}{7}$$

الحل: بما أن حجم المخروط الناقص =



$$\frac{22}{7} \pi (نق_1^2 + نق_2^2 + نق_3^2)$$

فإننا سنجد طول نق كما في الشكل.

المثلثان أ ب هـ، أ ج د متشابهان

(تساوي زواياهما المتناظرة)

$$\therefore \frac{أ هـ}{أ د} = \frac{ب هـ}{ج د}$$

$$\text{أي أن } \frac{ب هـ}{٧} = \frac{٣}{١٢} \text{ وبالضرب التبادلي}$$

$$ب هـ = \frac{٧ \times ٣}{١٢} = \frac{٧}{٤} \text{ سم طول نق}_1$$

$$\therefore \text{حجم المخروط الناقص} = \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{22}{7} \right) (٩) \left\{ \left(\frac{٧}{٤} \right)^2 + \left(\frac{٧}{٤} \right)^2 + (٧ \times \frac{٧}{٤}) \right\}$$

$$+ (٧)^2 \left\{ \right.$$

$$= \left(\frac{٤٩}{١} + \frac{٤٩}{٤} + \frac{٤٩}{٤} \right) \left(\frac{٦٦}{٧} \right) =$$

$$= \left(\frac{٤٩}{١} + \frac{٤٩}{٤} + \frac{٤٩}{١٦} \right) \frac{٦٦}{٧} =$$

$$= \left(\frac{٧٨٤}{١٦} + \frac{١٩٦}{١٦} + \frac{٤٩}{١٦} \right) \frac{٦٦}{٧} =$$

$$= \frac{١٠٢٩}{١٦} \times \frac{٦٦}{٧} =$$

مثال ١٦: كرة حجمها ح سم^٣ ومساحة ك سم^٢ أوجد طول نصف قطرها

عندما ح = ك.

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi^2 \text{نق}^3 \text{سم}^3$$

$$\text{مساحة سطح الكرة} = 4 \pi^2 \text{نق}^2 \text{سم}^2$$

وبما أن ح = ك

$$\therefore \frac{\frac{4}{3} \pi^2 \text{نق}^3}{\pi^2 \text{نق}^2} = \frac{\frac{1}{3} \pi^2 \text{نق}^3}{\pi^2 \text{نق}^2} \text{ أصبحت معادلة}$$





$$\frac{4}{3} \text{ نق} = \frac{4}{1} \text{ وبالصرب التبادلي}$$

$$\frac{4 \times 3}{4} = \text{نق} \frac{4}{4}$$

∴ نق = ٣ سم نصف قطر الكرة.

مثال ١٧: بئر ماء على شكل موشور خماسي مساحة قاعدته ٣ م^٢ وارتفاعه ٣,٦ م احسب كم لتراً من الماء يتسع عندما يكون مملوءاً.

الحل: سعة البئر هي حجمه من الداخل

حجم الموشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$\therefore \text{سعة البئر} = ٣ \times ٣,٦ = ١٠,٨ \text{ م}^٣$$

$$\text{من المعلوم أن م}^٣ = ١٠٠ \times ١٠٠ \times ١٠٠ = ١٠٠٠٠٠٠ \text{ سم}^٣$$

$$\text{وأن اللتر} = ١٠٠٠ \text{ سم}^٣$$

$$\therefore \text{م}^٣ = \frac{١٠٠٠٠٠٠}{١٠٠٠} = ١٠٠٠ \text{ لتر}$$

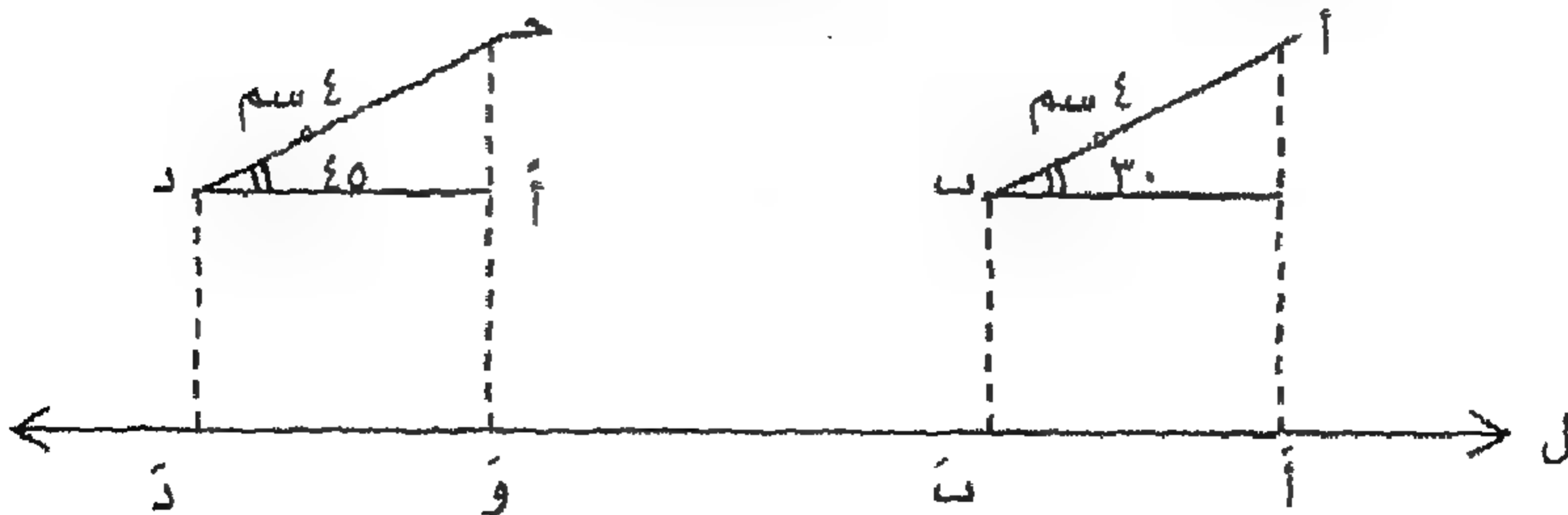
$$\therefore \text{سعة البئر} = ١٠٠٠ \times ١٠,٨ = ١٠٨٠٠ \text{ لتر}$$

مثال ١٨: أجب بنعم أو لا ولكن مع التوضيح التام:

إذا تساوت قطعتان مستقيمتان في الطول، هل يتساوى طولاً مسقطيهما؟

الجواب باختصار لا.

وأما البيان فهو بالتفصيل ومع التوضيح كما يلي:





مع أن $أ ب = ج د = ١٠$ سم وعلى سبيل المثال

فإن $أ ب \neq ج د$ للاختلاف بين قياسي القطعة المستقيمة ومسقطها في الحالتين كما في الشكل

$$\text{كون } أ ب = أ ب \text{ جتا } ٣٠^\circ = ١٠ \text{ جتا } ٣٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ١٠ = ٨,٥ \text{ سم} = \overline{أ ب} = ٥ (١,٧)$$

$$= ٨,٥ \text{ سم تقريباً}$$

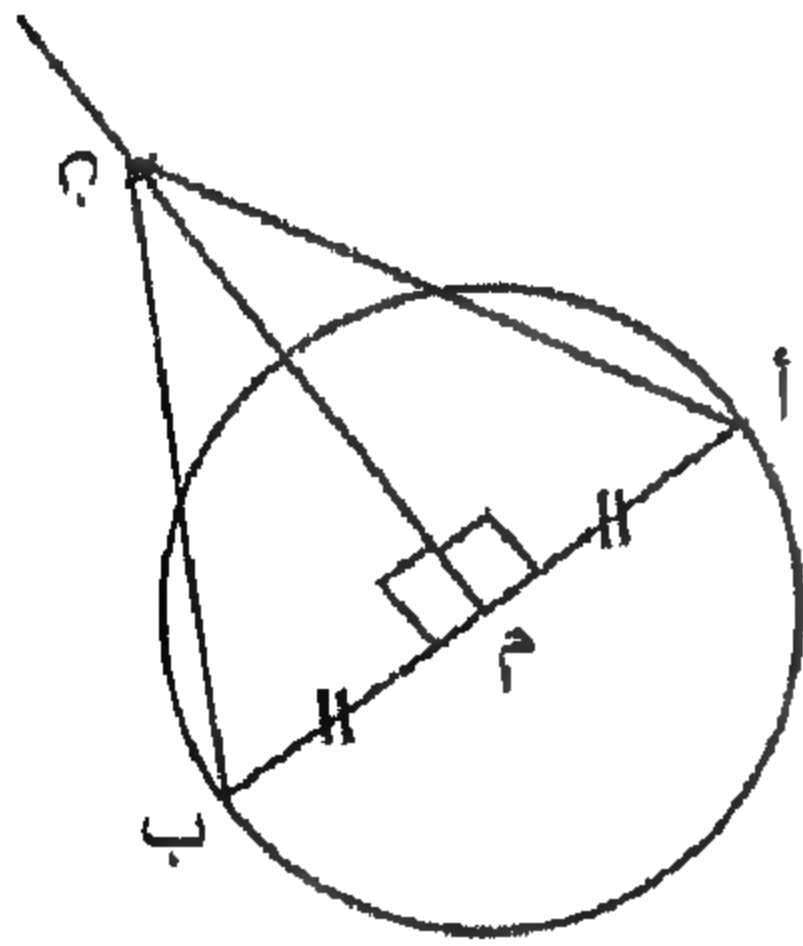
$$\text{وكذلك } ج د = ج د \text{ جتا } ٤٥^\circ = ١٠ \text{ جتا } ٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}} \times ١٠ = \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times ١٠ = ٧ \text{ سم}$$

$$= \frac{\sqrt{٢} \times ١٠}{٢} = ٧ \text{ سم} = ٥ (١,٤)$$

أي أن ولو كان $أ ب = ج د$ فإن $أ ب \neq ج د$ والسبب هو قياس الزاوية بين القطعة المستقيمة ومسقطها في كل حالة.

مثال ١٩: دائرة مركزها م، أقيم من مركزها عموداً على مستواها وفرضت عليه أي نقطة مثل ن، إذا كانت أ، ب نقطتين على الدائرة (محيطها).

بين أن $أ ن = ب ن$



الحل: بما أن م \perp مستوى الدائرة

\therefore م \perp على أي مستقيم في الدائرة

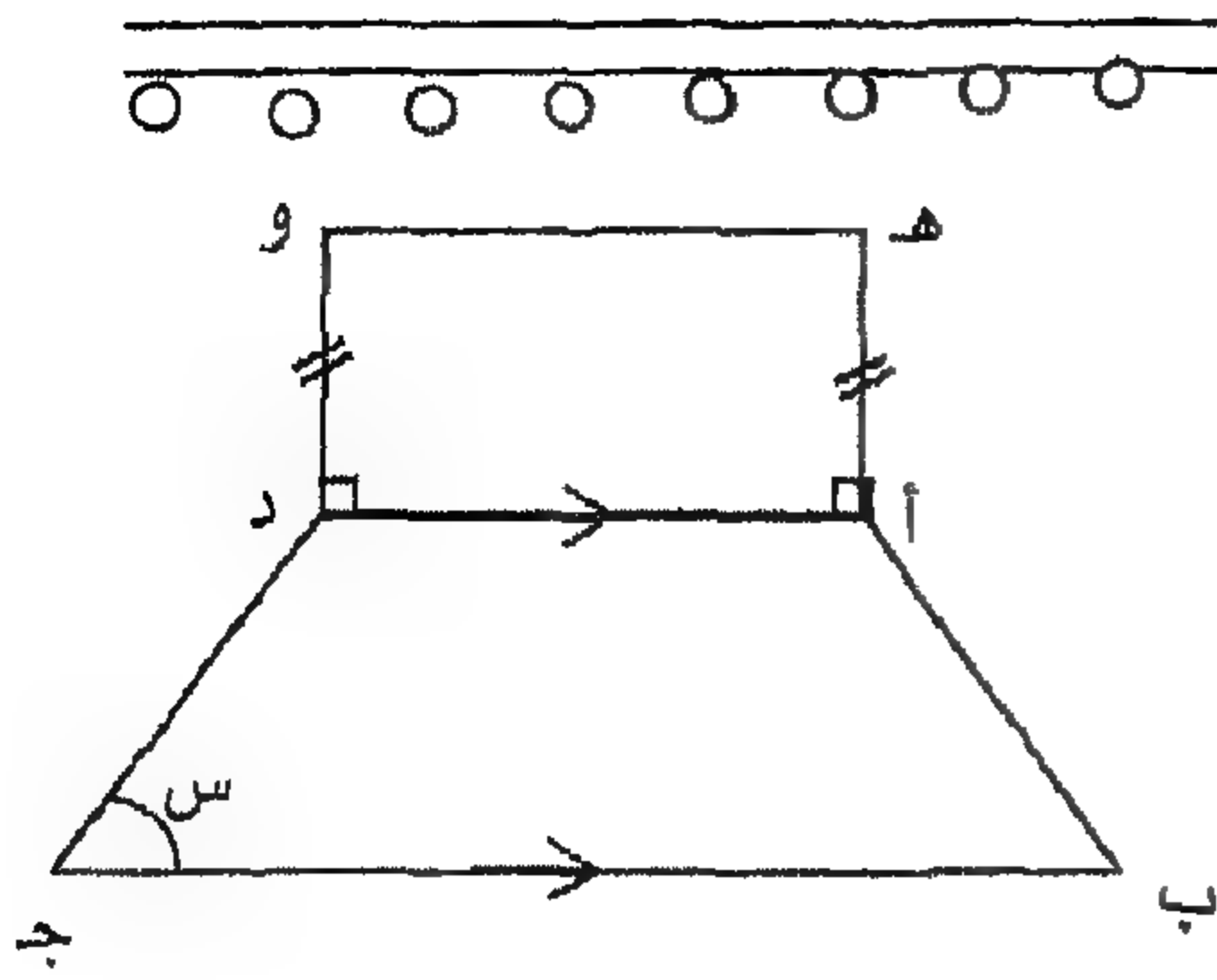
\therefore م \perp أ ب

\therefore $أ م = ب م$ = قائمة

وبما أن $أ م = ب م$ أنصاف أقطار الدائرة

\therefore أ ن ب مثلث متساوي الساقين كون م \perp عمود والنصف القاعدة أ ب

\therefore أ ن = ب ن وهذا المطلوب بيانه



مثال ٢٠: أ ب ج د شبه
منحرف أ د // ب ج ، رسم العمودان
هـ أ ، د و على مستوى شبه المنحرف س
بحيث أن هـ أ = د و

بين أن هـ و // المستوى س.

الحل:

هـ أ ، و د عمودان على نفس المستوى س لذا فإن هـ أ // و د

وبما أن هـ أ = د و بالمعطيات

∴ هـ أ د و متوازي أضلاع

وبما أن زواياه قوائم

∴ هـ أ د و مستطيل

∴ هـ و // و د

ولما كان أ د مستقيم واقع في المستوى س

∴ هـ و // المستوى س



(١٤ - ٦) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) ما حجم أسطوانة قطر قاعدتها ٦٠ سم وارتفاعها ٨٠ سم

$$\pi = 3.14$$

{ ٢٢٦ سم^٣ تقريباً }

(٢) أي من المسميات (نقطة، مستقيم، شعاع، قطعة مستقيمة، مستوى)

يمكن أن تعبر عن كل ما يلي:

١. ذرة من الرمل

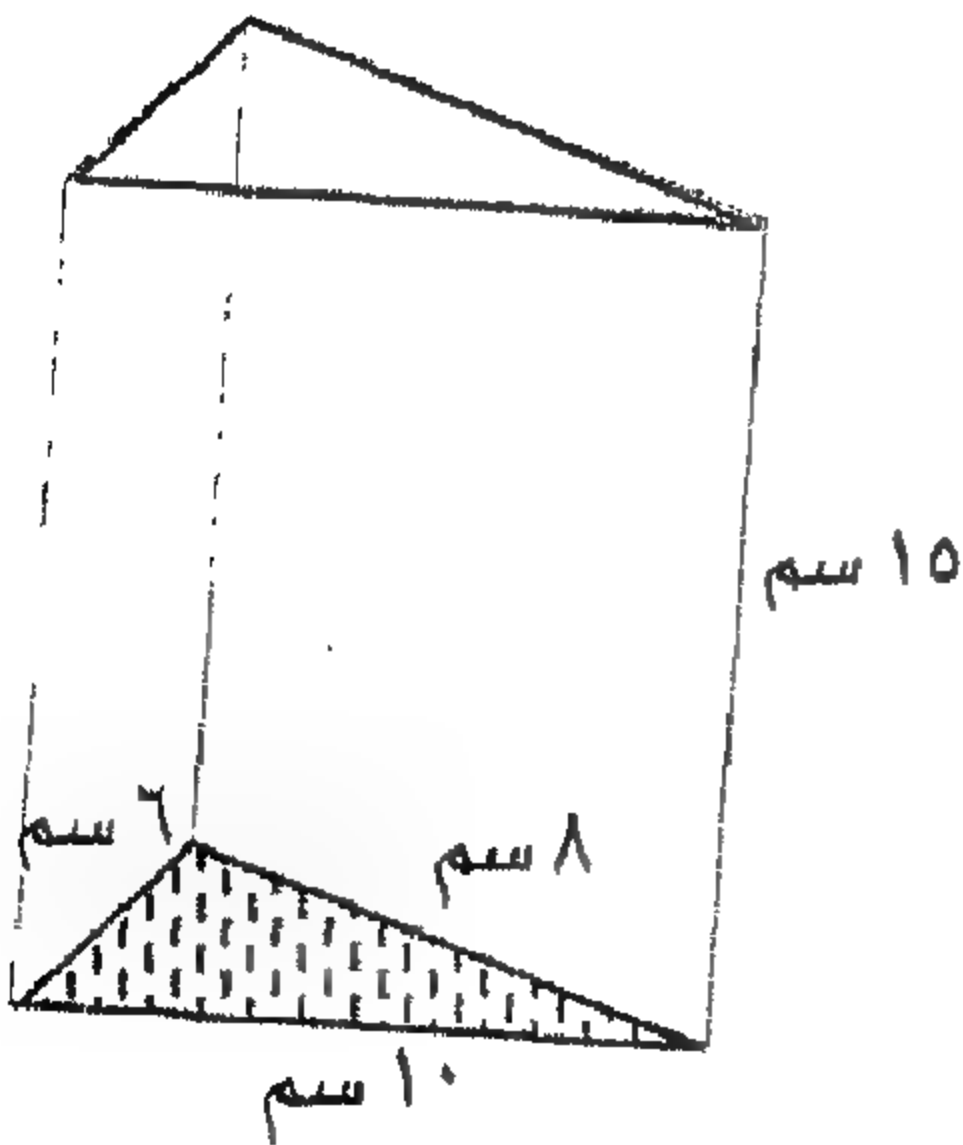
٢. سقف الغرفة

٣. موقع سفينة في البحر

٤. ملعب كرة القدم

٥. ضلع الزاوية الابتدائي

٦. ضلع المربع



(٣) موشور ثلاثي قاعدته مثلث قائم الزاوية

وارتفاعه ١٥ سم كما في الشكل احسب

١. مساحته الجانبية

٢. مساحته الكلية

٣. حجمه

{ ٣٦٠ سم^٣، ٤٠٨ سم^٢، ٣٦٠ سم^٢ }

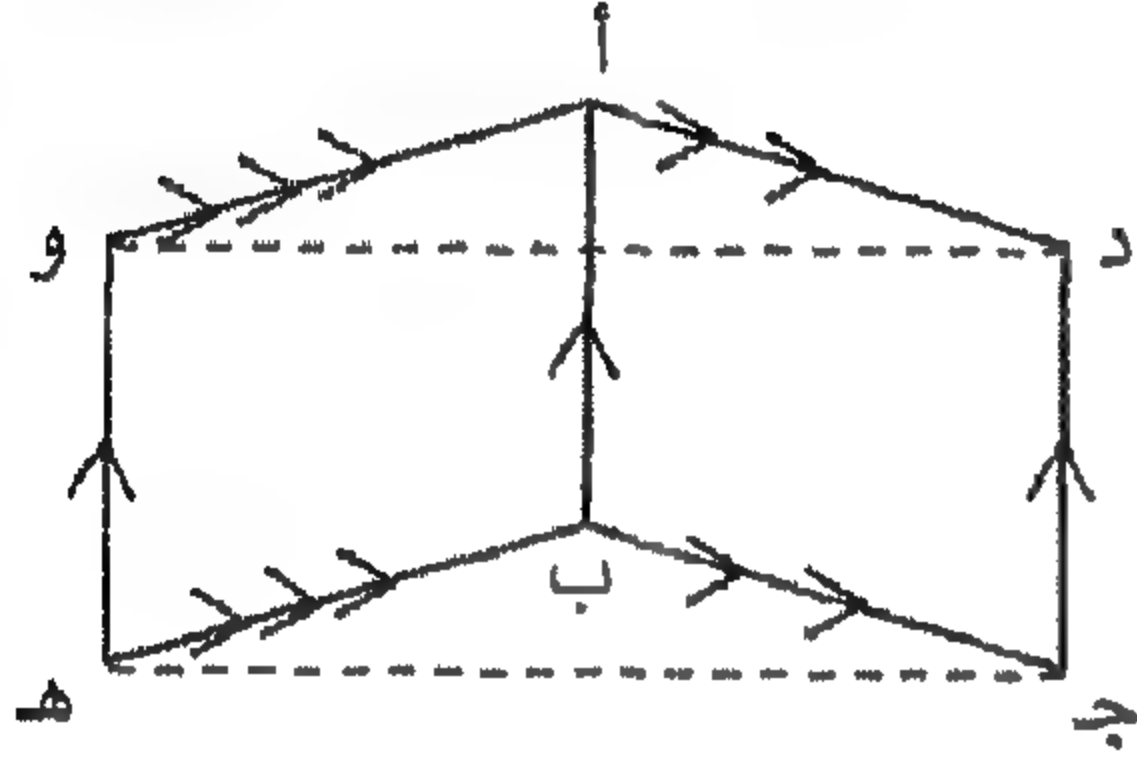




(٤) أيهما أكبر حجماً؟ الأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها ١٤ سم وارتفاعها ٧ سم أم الأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها ٧ سم وارتفاعها ١٤ سم.

{الأسطوانة أ}

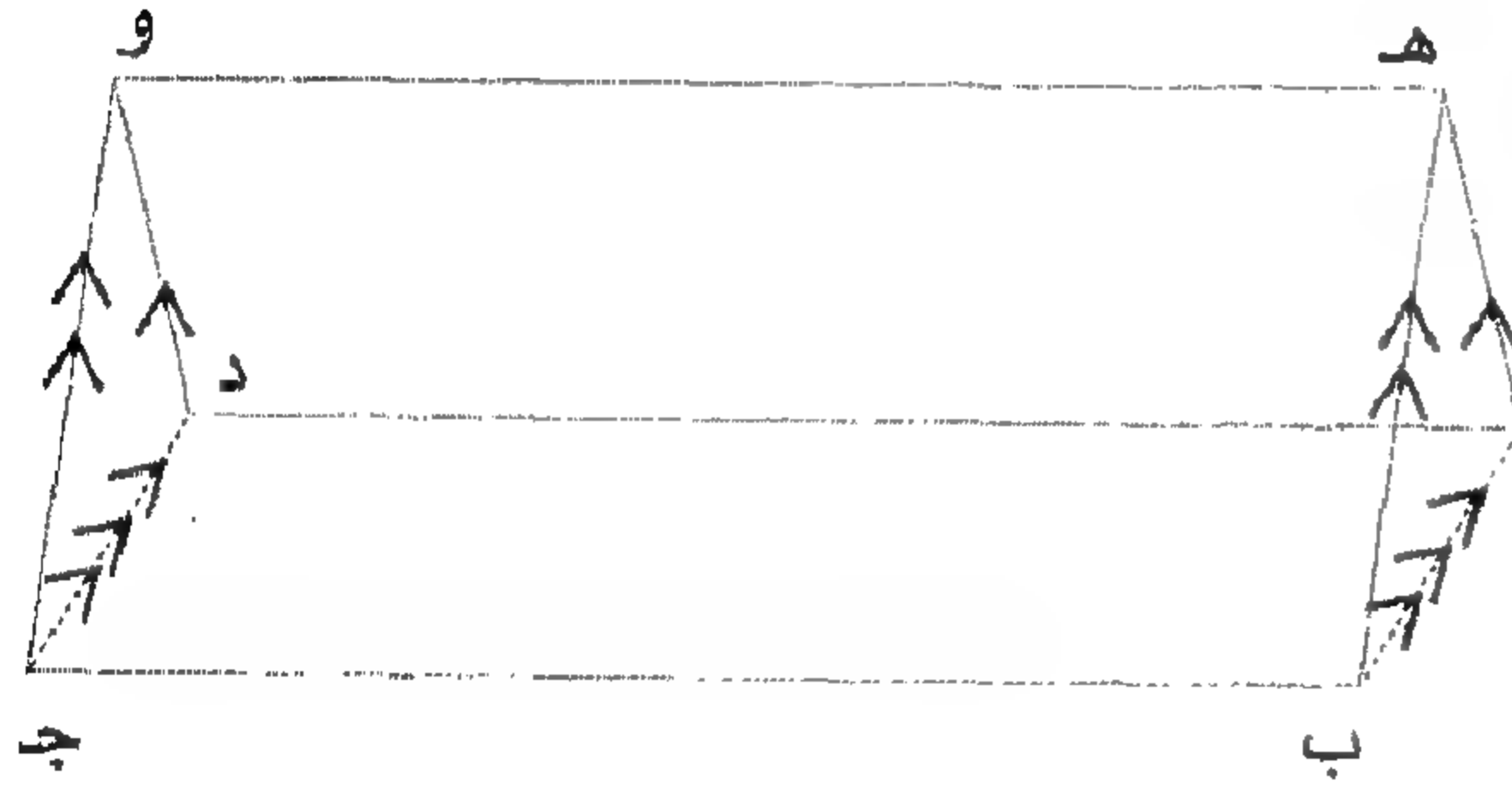
(٥) أ ب ج د، أ ب هـ و متوازي أضلاع يقعان في مستويين مختلفين كما في الشكل.



بين أن ج د و هـ متوازي أضلاع

إرشاد {د ج = و هـ و يوازيه}

(٦) اعتماداً على الشكل المجاور، أجب بنعم أو لا:



«١» النقط أ، ب، ج مستقيمة

«٢» النقط أ، ب، هـ مستوية

«٣» النقط و، د، ب مستوية

(٧) أ ب ج د مثلث قائم الزاوية في ب، أقيم من ج عمود على مستوى المثلث وعُينت عليه النقطة د بحيث كان أ ب = ج د = ٢ ب ج.

بين أن أ د = ٣ ب ج

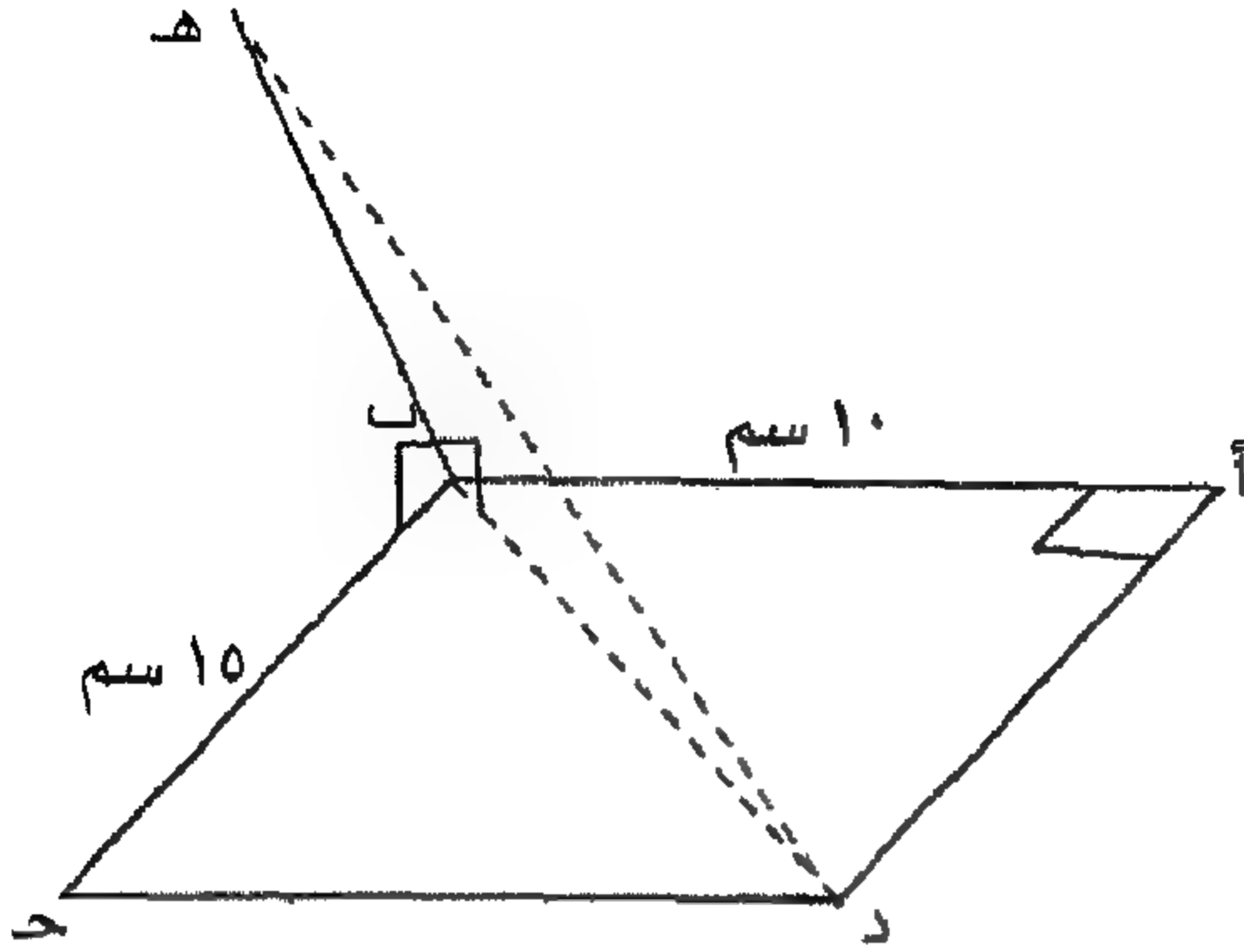
إرشاد: استعن بنظرية فيثاغورس

(٨) أ ب ج د مستطيل فيه أ ب = ١٠ سم، ب ج = ١٥ سم أقيم من ب عمود على



مستوى المستطيل وعينت عليه النقطة هـ بحيث كان ب هـ = ٢٠ سم كما في

الشكل ما طول هـ د ؟



$$\{ ٥ \sqrt{٢٩} \text{ سم} = ٢٧ \text{ سم تقريباً} \}$$

(٩) كتلة خشبية على شكل متوازي مستطيلات أبعاده ٢٤ سم، ١٦ سم، ١٠ سم

احسب عدد المكعبات الخشبية التي يمكن صنعها من تقطيع هذه الكتلة إذا كان طول حرف القطعة المكعبة الواحدة ٢ سم.

$$\{ ٤٨٠ \}$$

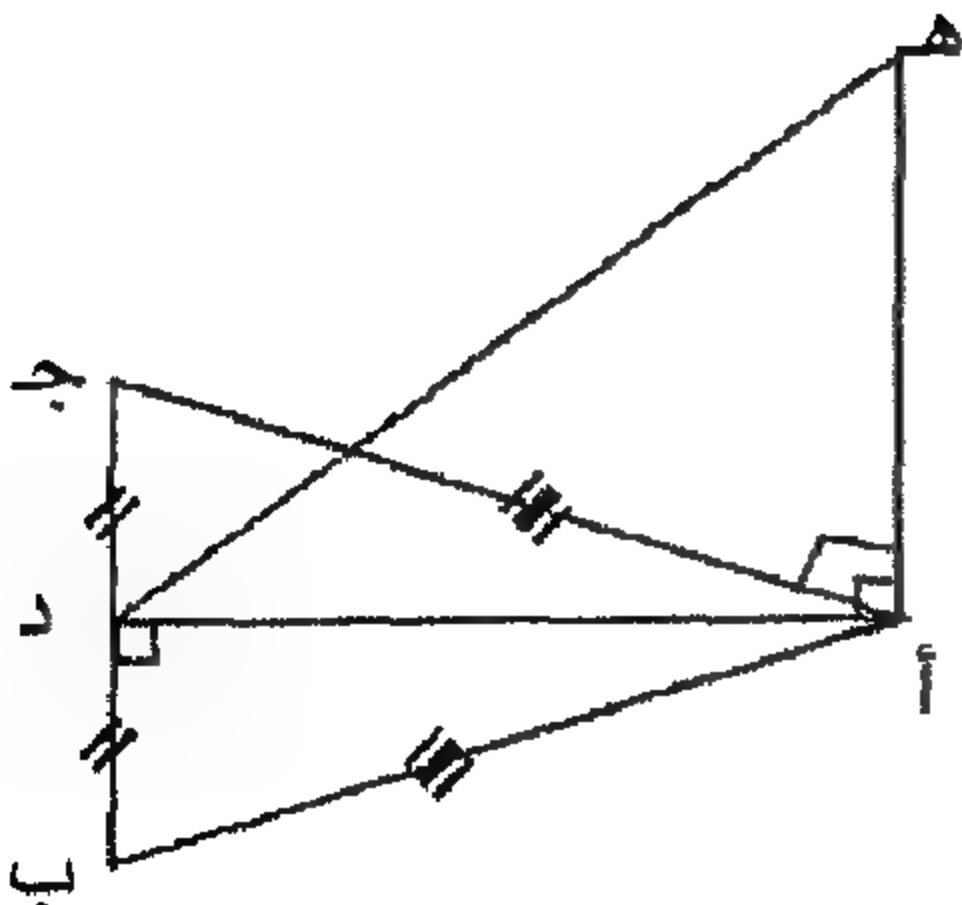
(١٠) مكعب من حديد حجمه ٦٤ سم^٣ ما مساحته الكلية

$$\{ ٩٦ \text{ سم}^٢ \}$$

(١١) أ ب ج مثلث فيه أ ب = أ ج

رسمت أ هـ \perp المستوى أ ب ج

فإذا كانت د منتصف ب ج

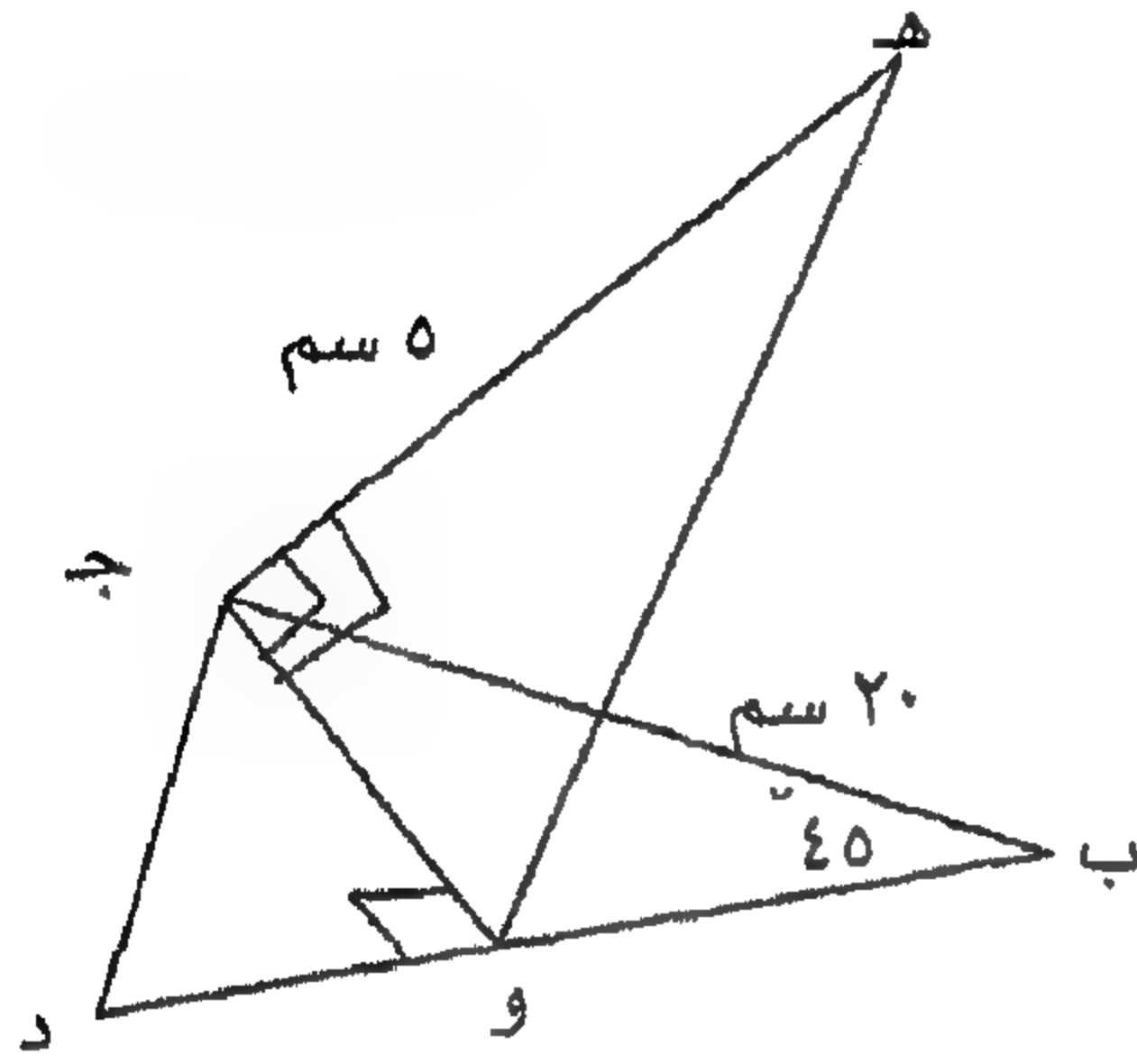




بين أن $\overline{HD} \perp \overline{BJ}$

استعن بالشكل المجاور.

إرشاد أ د ارتفاع ومستقيم متوسط



(١٢) إذا كان الشكل يمثل المثلث ب ج د

الذي فيه $\angle B = 45^\circ$ ، $BG = 20$ سم

رسمت \overline{JH} عمودية على المستوى ب

ج د ثم رسمت \overline{HJ} و \overline{BJ} فقطعته

في النقطة و وكان $JH = 5$ ، فما طول

القطعة \overline{HJ}

{١٥}

(١٣) وجدت نملة نفسها فجأة في قرنة سقف قاعة بشكل متوازي مستطيلات طولها

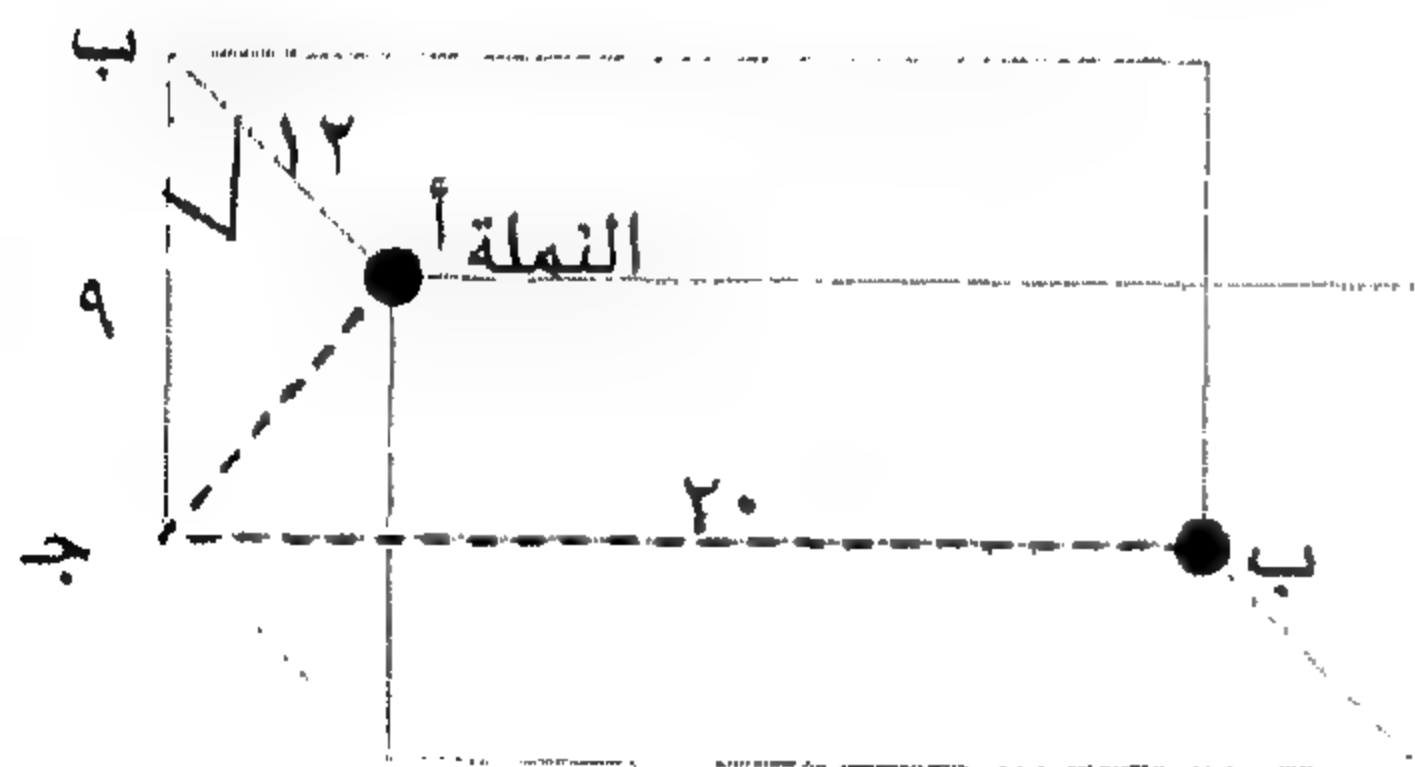
٢٠ مترو عرضها ١٢٣ مترو وارتفاعها ٩ م.

احسب طول أقصر مسافة تقطعها النملة لتصل إلى القرنة المقابلة على الأرض

استعن بالشكل.

حيث أ نقطة البداية

ب نقطة النهاية



{٣٥ متر}



(١٤) ما حجم كل من المكعبات التالية بالأمطار المكعبة؟

«١» مكعب طول حرفه ٧٥ سم

«٢» مكعب طول حرفه ١٦ د سم

«٣» مكعب طول حرفه ٥ م

{١٢٥ ، ٤,٠٩٦ ، ٠.٤٢١}

(١٥) مكعب حجمه ٢١٦ سم^٣ احسب

«٢» مساحته الكلية

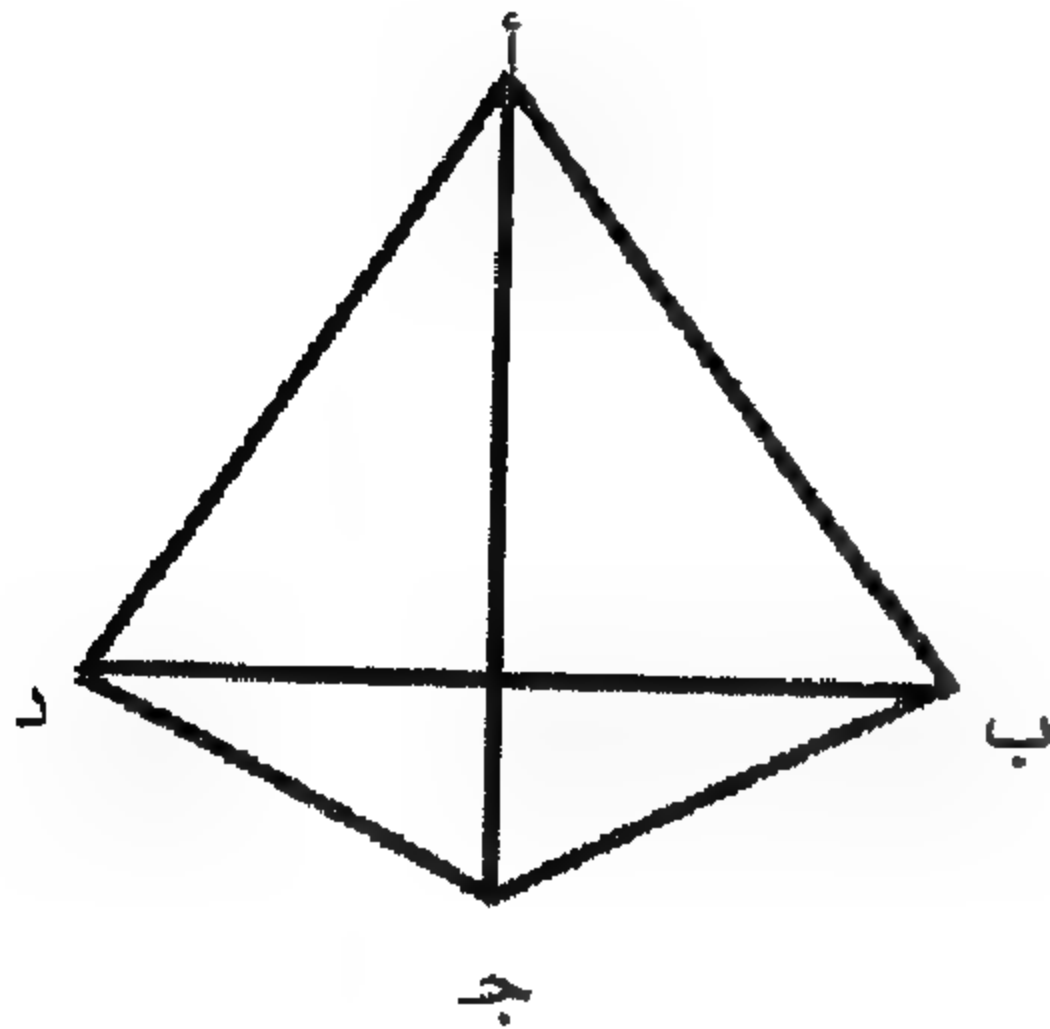
«١» مساحته الجانبية

{٢١٦ ، ١٤٤}

(١٦) ما طول ضلع مكعب حجمه يساوي مساحته الجانبية ؟

{٤}

(١٧) اعتمد على الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة التالية:

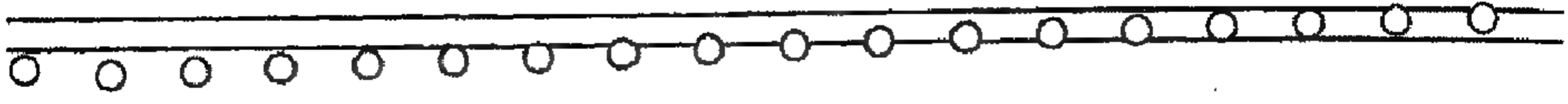


«١» سم ثلاث نقاط.

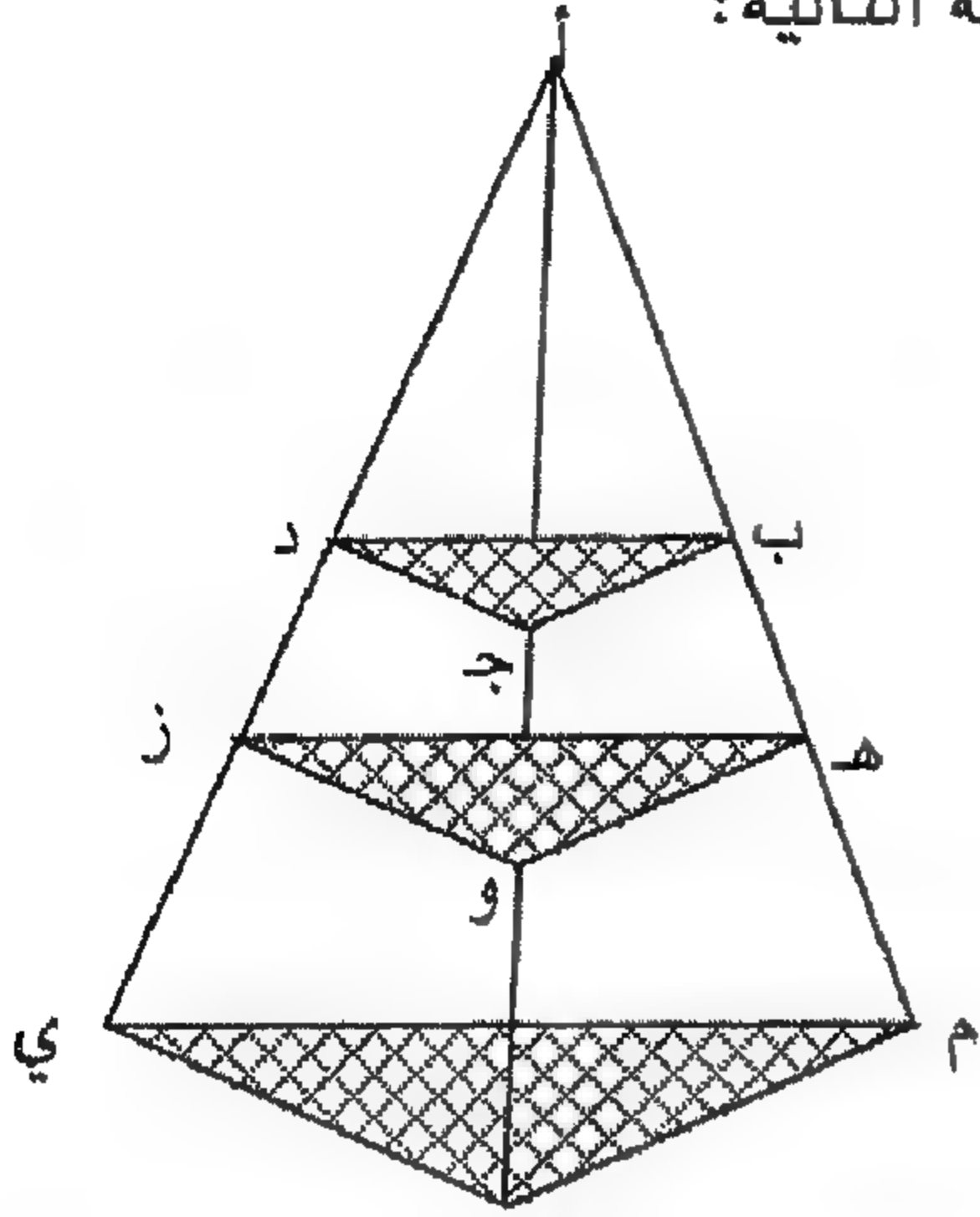
«٢» سم ثلاثة مستقيمات.

«٣» سم ثلاثة مستويات.

{ {أ، ب، ج، د} ، { $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بج}$ ، $\overleftrightarrow{دأ}$ } ، { $\overleftrightarrow{أبج}$ ، $\overleftrightarrow{أدج}$ ، $\overleftrightarrow{أب د}$ } }



(١٨) اعتمد على الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة التالية:



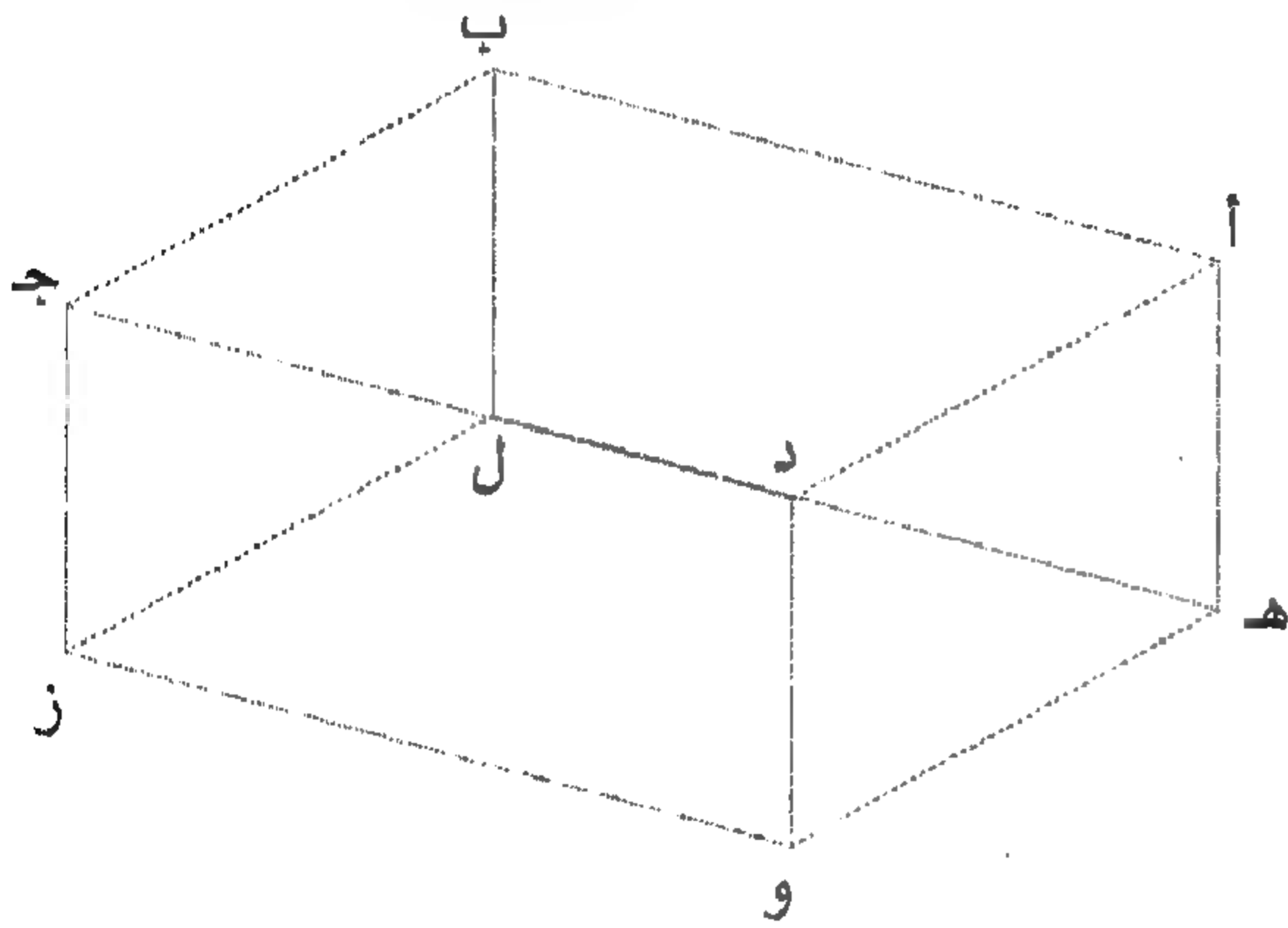
«١» سم خمسة مستويات مختلفة

«٢» سم مستويين يحويان المستقيم ح ي

«٣» سم مستويين يحويان المستقيم ح ط

(١٩) اعتمد على الشكل المجاور والذي يمثل متوازي المستطيلات للإجابة عن

الأسئلة الآتية:



«١» سم ثلاثة مستقيمات

توازي المستقيم د ج

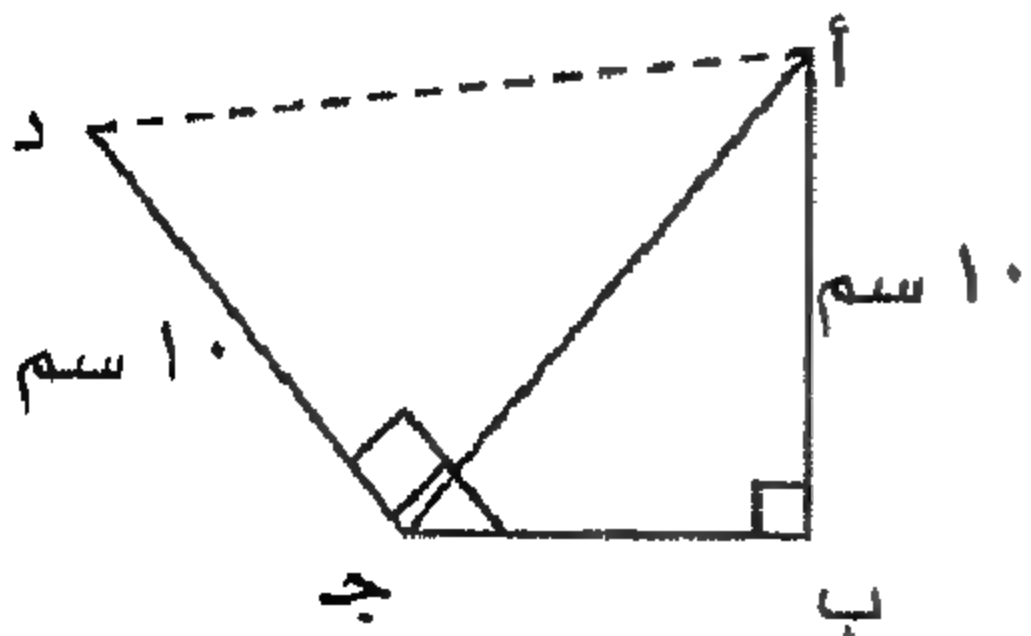
«٢» سم ثلاثة أزواج من

المستقيمات المتقاطعة.

«٣» سم ثلاثة أزواج من

المستقيمات المتخالفة.

(٢٠) سلك من النحاس الأصفر CU طوله ٢٥ سم، عُينت عليه النقاط أ، ب، ج، د



على الترتيب بحيث احتلت النقطتان أ، د

طرفي السلك وكان أ ب = د ج = ١٠ سم،

ثُبِّت أجزاء السلك من النقطتين ب، ج



بحيث كان أ ب ⊥ ب ج، ج د ⊥ المستوى أ ب ج كما في الشكل.

احسب طول أ د.

{ ١٥ سم }

(٢١) قال حسّان لصديقه نعمان: رأيت في المنام بيتاً ضخماً على شكل هرم سداسي

منتظم القاعدة طول ضلع قاعدته ٤ متر وارتفاعه ١٢ متراً.

احسب لي حجمه.

إرشاد: اقسم القاعدة إلى مثلثات واستخدم القانون مساحة المثلث =

$$\sqrt{ح (ح - أ) (ح - ب) (ح - ج)}$$

{ ٢٤٦ م^٣ تقريباً }

(٢٢) ارسم شكلاً يمثل كل حالة من الحالات التالية:

«١» المستقيمان ل_١، ل_٢ يتقاطعان في النقطة أ.

«٢» النقط أ، ب، ج، هـ مستوية.

«٣» المستويان س، ص يتقاطعان في المستقيم ج د.

«٤» المستقيم ج د لا يقطع المستوى س.

«٥» المستقيم ل يقطع المستوى س في النقطة هـ.

(٢٣) كم مستوى تمثل جدران غرفة الصف (بشكل متوازي مستطيلات). { ٤ }

وكم مستقيماً ينتج من تقاطع هذه المستويات مثنى؟ { ٤ }





(٢٤) إذا كانت النقط أ، ب، ج غير مستقيمة وواقعة في المستوى س، كم مستقيماً

يمكن رسمه بحيث يحتوي كل منها نقطتين من هذه النقط ؟

{٣}

(٢٥) أ، ب، ج، د، هـ خمس نقط مستوية، ليس منها أي ثلاث مستقيمة، كم

مستقيماً يمر بها إذا أخذت مثني مثني.

{١٠}

(٢٦) ما عدد المستويات التي يمكن رسمها بحيث يمر كل منها:

«١» بثلاث نقط غير مستقيمة.

«٢» بثلاث نقط مستقيمة.

«٣» بأربع نقط، ثلاث منها مستقيمة.

(٢٧) ما نص المسلمة التي تفسر كلاً من هاتين العبارتين!

«١» إذا كانت أ، ب نقطتين على المستقيم ل

و كانت أ، ب نقطتين على المستقيم م

فإن ل، م هما المستقيم نفسه.

«٢» إذا كانت أ، ب نقطتين في المستوى س فإنه لا يوجد أي نقطة على

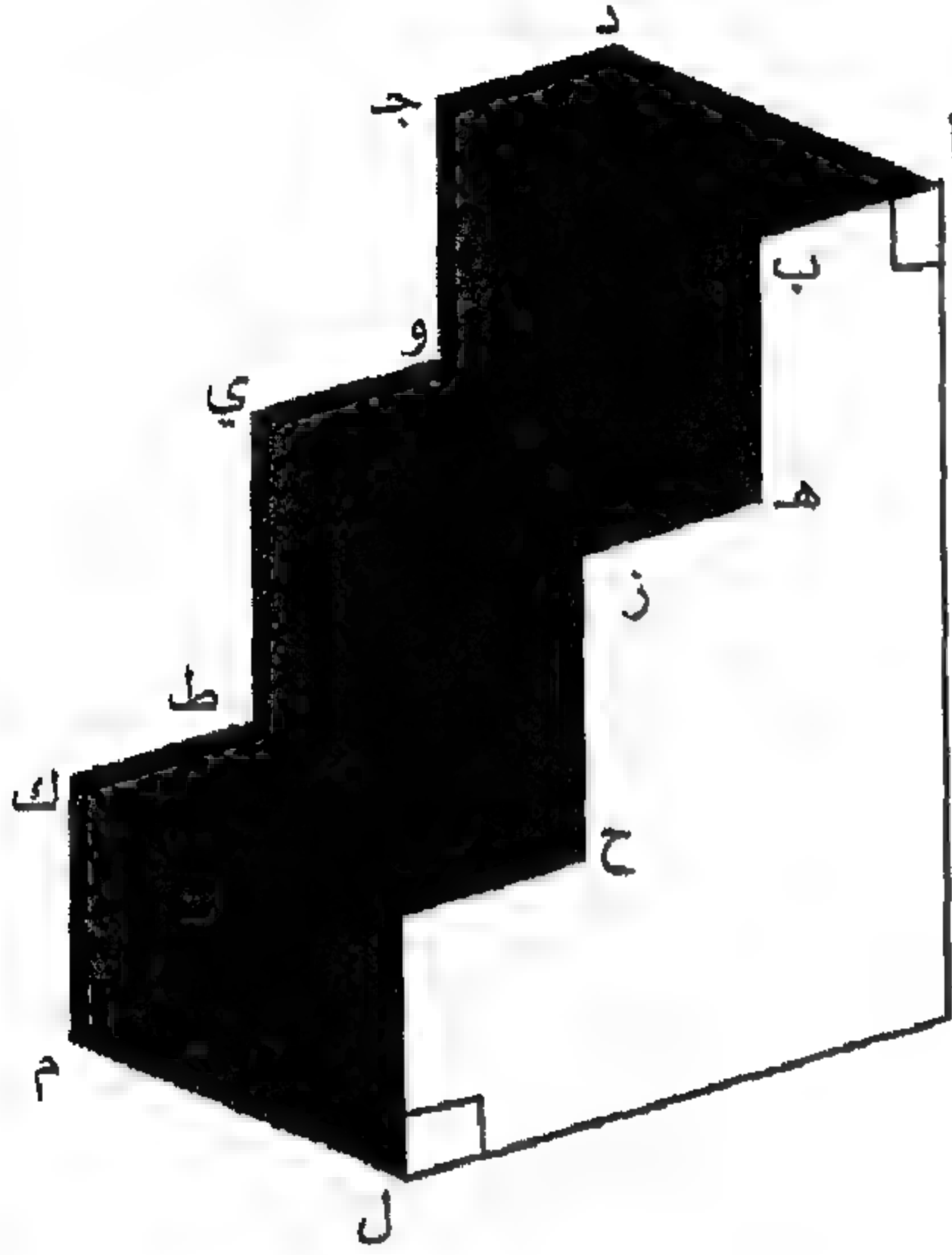
المستقيم أ ب لا تقع في المستوى س.



(٢٨) ما أقل عدد من النقاط والتي تحدد المستوى الواحد ؟ وضح بالرسم.

(٢٩) الشكل المجاور يمثل مقطعاً عرضياً لدرج والسؤال: أعط مثلاً واحداً على

كل حالة من الحالات التالية:



«١» مستويان متعامدان.

«٢» مستويان متوازيان.

«٣» مستقيمان متخالفان.

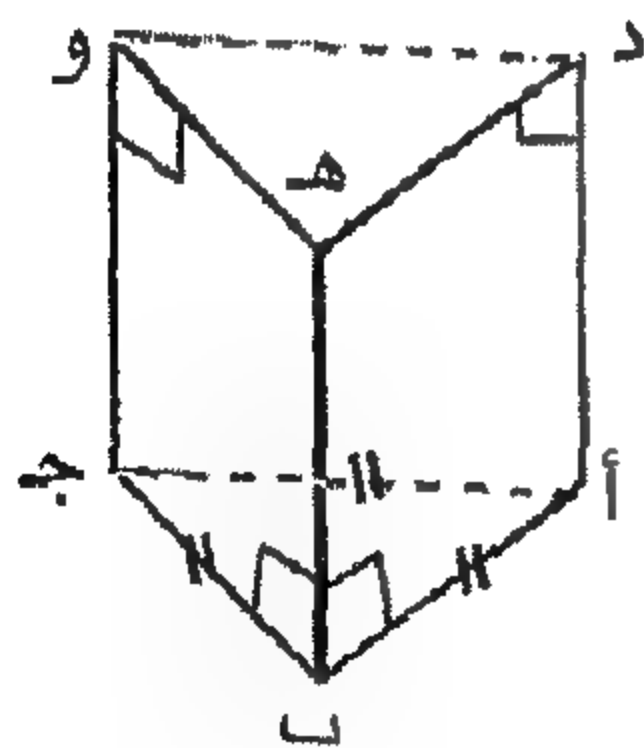
«٤» مستقيم يقطع المستقيم ق ك

«٥» مستقيمان متوازيان.

«٦» مستويان متقاطعان.

(٣٠) الشكل المجاور يمثل موشوراً ثلاثياً قائماً قاعدته مثلث متساوي الأضلاع

اعتماداً عليه أجب عما يلي:



«١» ما قياس كل زاوية زوجية في الشكل {٦٠°}

«٢» سم المستويات المتعامدة.

«٣» ما قياس الزاوية بين المستقيمين أ ب، هـ و {٦٠°}

(٣١) الشكل المجاور يمثل دائرة مركزها د ونصف قطرها ١٠ سم، أ ب وتر فيها

طوله ١٢ سم، د ج \perp مستوى الدائرة

حيث د ج = ٦ سم

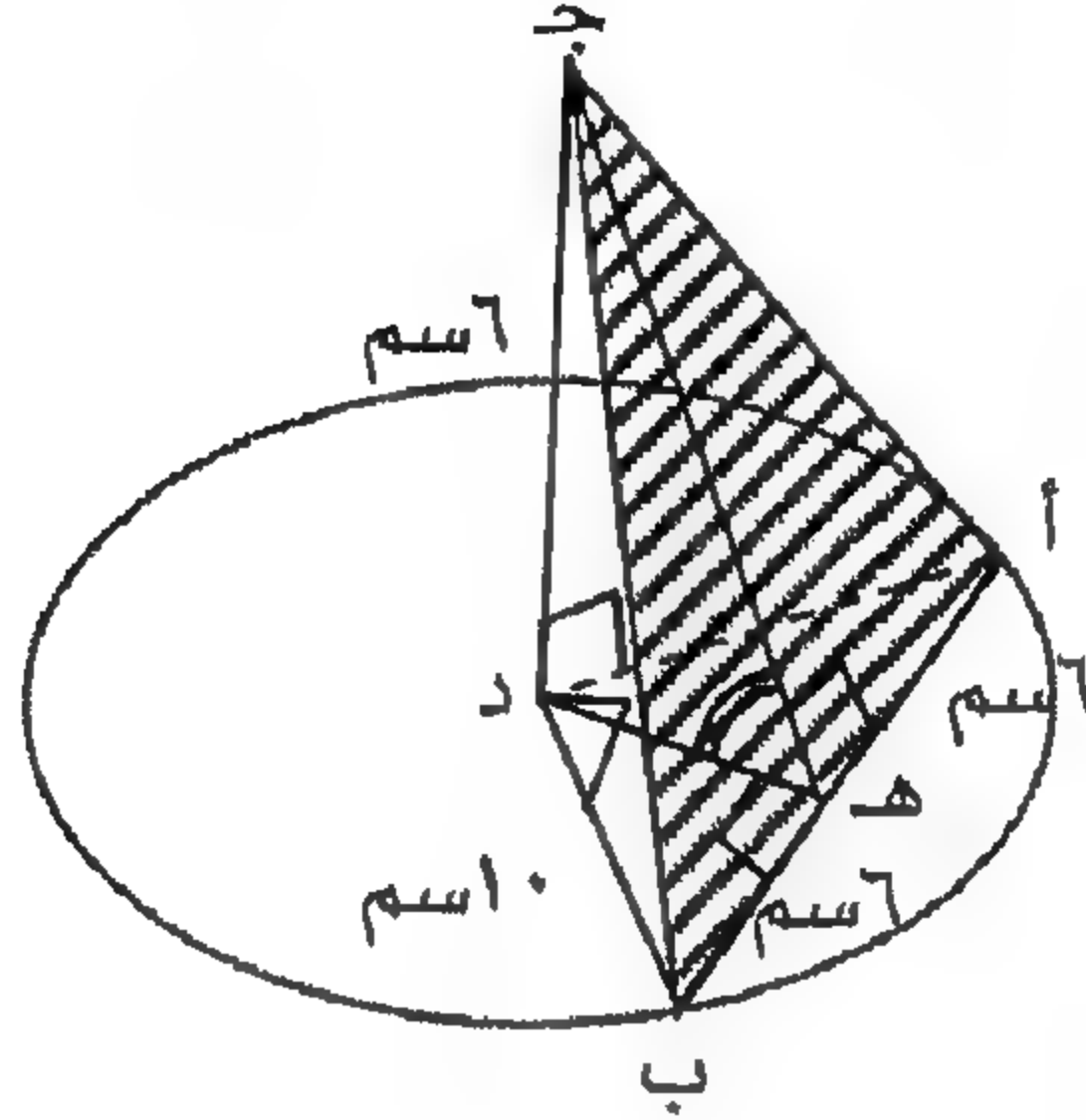




احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب ج ومستوى الدائرة

{إرشاد: إنها الزاوية ج ه د والتي تمثل ج - أ ب - د }

{٤٥°}

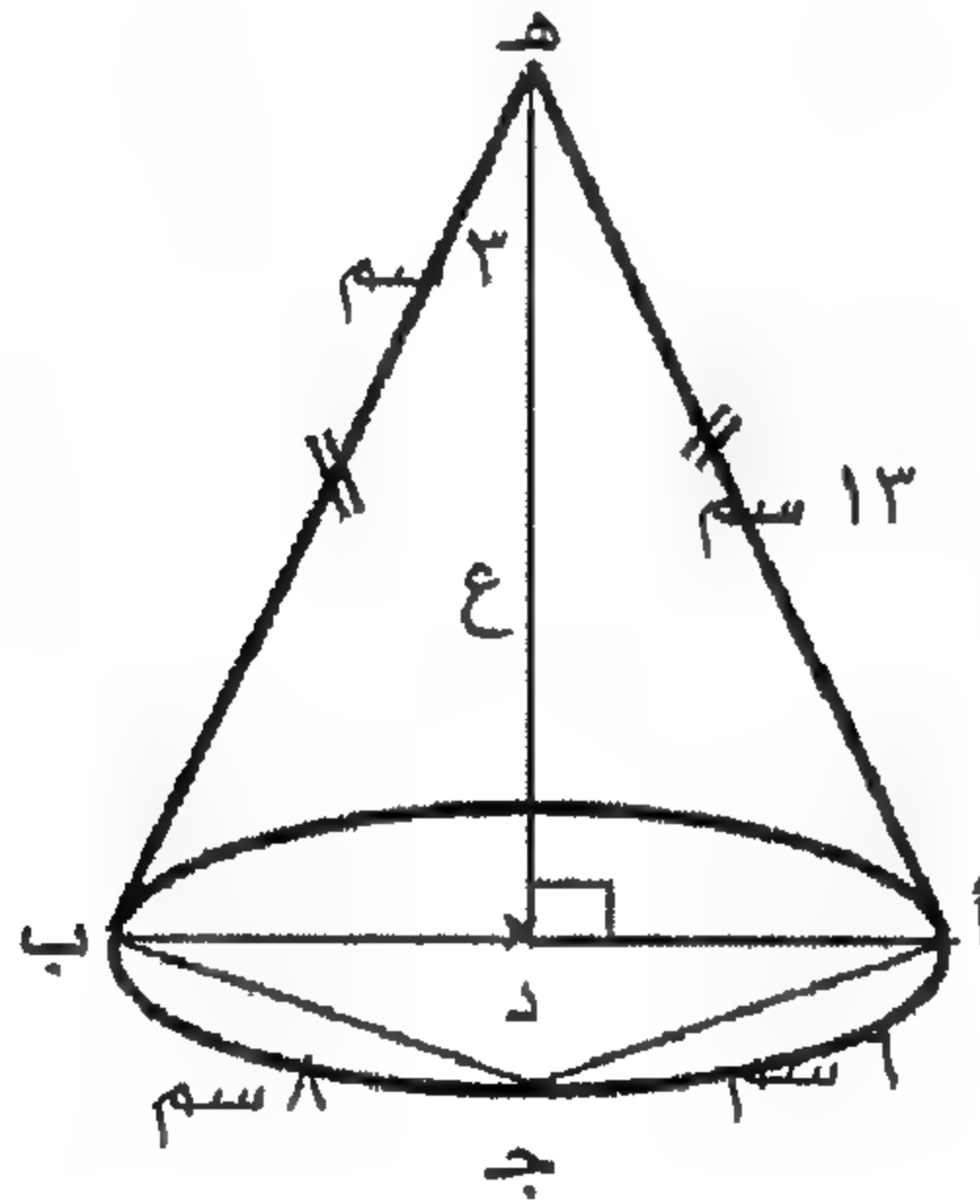


(٣٢) مخروط قائم طول راسم أ ه = ١٢ سم عُن على محيط قاعدته النفط أ، ب،

ج بحيث كان أ ج = ٦ سم، ب ج = ٨ سم، أ ب قطعاً لقاعدته كما في

الشكل، احسب طول ارتفاعه ه د.

{١٢}



(٣٣) ما حجم الكرة الأرضية إذا اعتبرنا أن طول نصف قطرها ٤٠٠٠ ميل (كما

يقول الجغرافيون) وباعتبار $\pi = ٣,١٤$.

(٣٤) مكعب من الرصاص طول حرفه ٩ سم، صُهر هذا المكعب بالحرارة وحوّل





إلى اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها ٤ سم وارتفاعها ١٤ سم، ما حجم الرصاص الذي فُقد أثناء عملية الصهر والتحويل علماً بأن $\pi = \frac{22}{7}$.

(٣٥) خزان ماء أرضي طوله $7\frac{1}{7}$ متر وعرضه $5\frac{1}{5}$ متر وعمقه $4\frac{1}{4}$ متر، ما حجم الماء بالتر المكعب اللازم ملئه بالكامل.

(٣٦) إذا كان حجم موشور رباعي قائم ٤٨ د سم^٣ ما حجم الهرم المشترك معه بالقاعدة والارتفاع.

{ ١٦ د سم^٣ }

(٣٧) صنع سُفيان صندوقاً من الخشب على شكل موشور قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ١ متر وارتفاعه $\frac{1}{2}$ متر مفتوحاً من الأعلى، ما ثمن الخشب الذي صنعه منه علماً بأن تكلفة المتر المربع الواحد ٨ دنانير.

إرشاد: مساحة القاعدة والمساحة الجانبية

{ ٢٤ دينار }

(٣٨) ما حجم اسطوانة دائرية نصف قطر قاعدتها ٥ سم ومساحتها الجانبية ٦٠٠ سم^٢

{ ١٥٠٠ سم^٣ }

(٣٩) قطعة من ورق الترشيح على شكل نصف دائرة قطرها ٦,٢٨ سم حوّلت على شكل مخروط دائري قائم أجوف، احسب مساحة المخروط الناتج الجانبية.

{إرشاد: ورقة الترشيح قطاع دائري زاويته المركزية ١٨٠°}





(٤٠) منزل على شكل موشور رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ١٢,٥ متر وارتفاعه ٣,١ متر يعلوه هرم رباعي قائم ارتفاعه ١,٦ متر، احسب حجم المنزل.

(٤١) ما طول نصف قطر كرة حجمها $\pi ٤٠٠٠$

$$\{ \sqrt[3]{10} \text{ سم} \}$$

(٤٢) ارسم شكلاً هندسياً يُجسم هرم خوفو علماً بأن قاعدته مربعة طول ضلعها ٢٣٠ مترو ارتفاعه ١٤٩ متر.

(٤٣) مكعب حجمه ٧٥ سم^٣ تم تغيير الحجم حسب معامل التغير $\frac{2}{5}$ كم يصبح حجمه .

$$\{ \frac{24}{5} \text{ سم}^3 \}$$

(٤٤) حدّد المجسم الذي فيه

«١» ستة أوجه متطابقة

«٢» قاعدتان دائريتان وسطح منحنى.

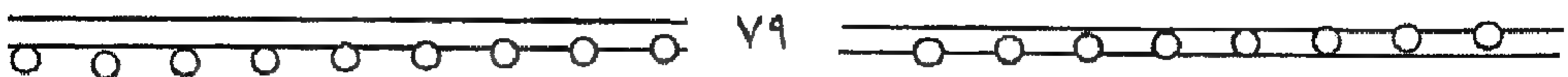
«٣» قاعدة ثلاثية وثلاثة أوجه مثلثية الشكل.

«٤» قاعدة دائرية واحدة وسطح منحنى.

«٥» سطح منحنى بلا قاعدة ولا ارتفاع.

(٤٥) كرة مساحة سطحها $\pi ٣٦$ سم^٢ ، أوجد نصف قطرها وحجمها.

$$\{ ٣ \text{ سم} , \pi ٣٦ \text{ سم}^3 \}$$





(٤٦) أكمل نص المُسلمات التالية مراعيًا الصحة والدقة العلمية.

«١» إذا تقاطع مستقيمان مختلفان فإنهما يتقاطعان....

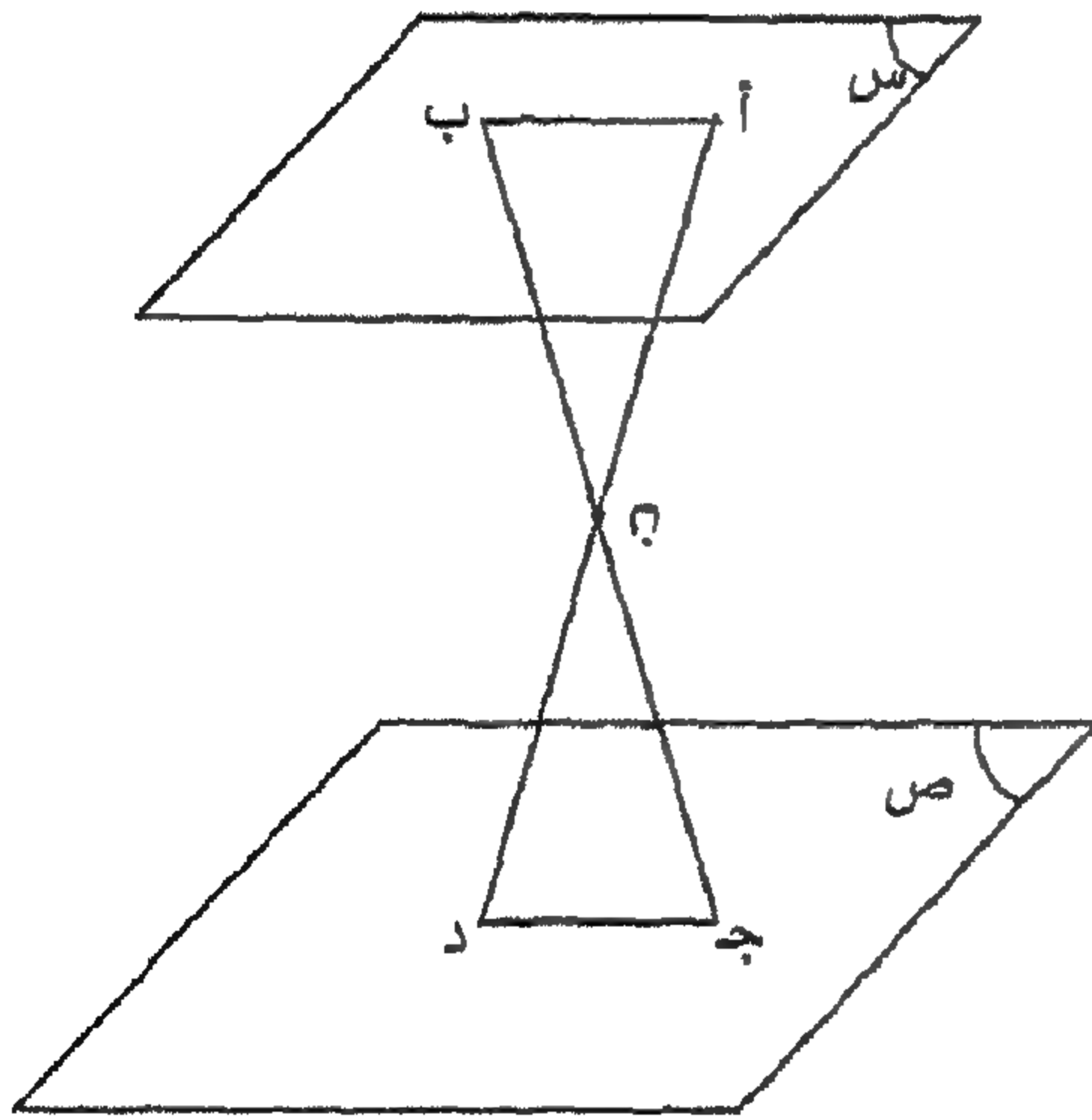
«٢» لأي ثلاث نقط غير مستقيمة تحدد....

«٣» إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان....

(٤٧) إذا كانت النقط أ، ب، ه تقع في المستوى س.

والنقط أ، ب، ج تقع في المستوى ص.

بين بالرسم أن المستويين س، ص متقاطعان في المستقيم \overleftrightarrow{AB}



(٤٨) إذا كانت ه نقطة خارج

المستويين س، ص، وإذا مر

بالنقطة ه مستقيمان قطعاً

المستوى س في أ، ب وقطعاً

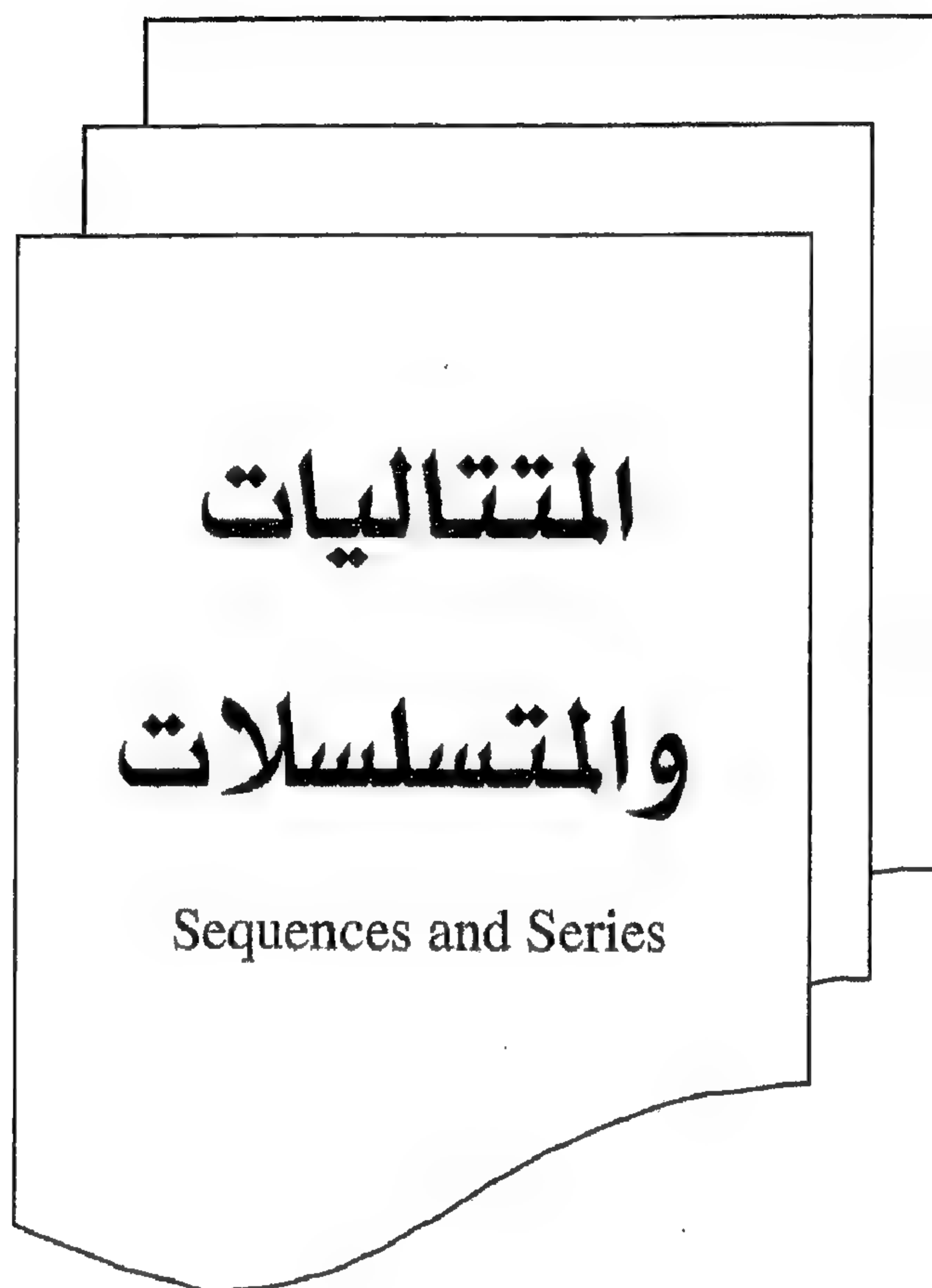
المستوى ص في ج، د كما في

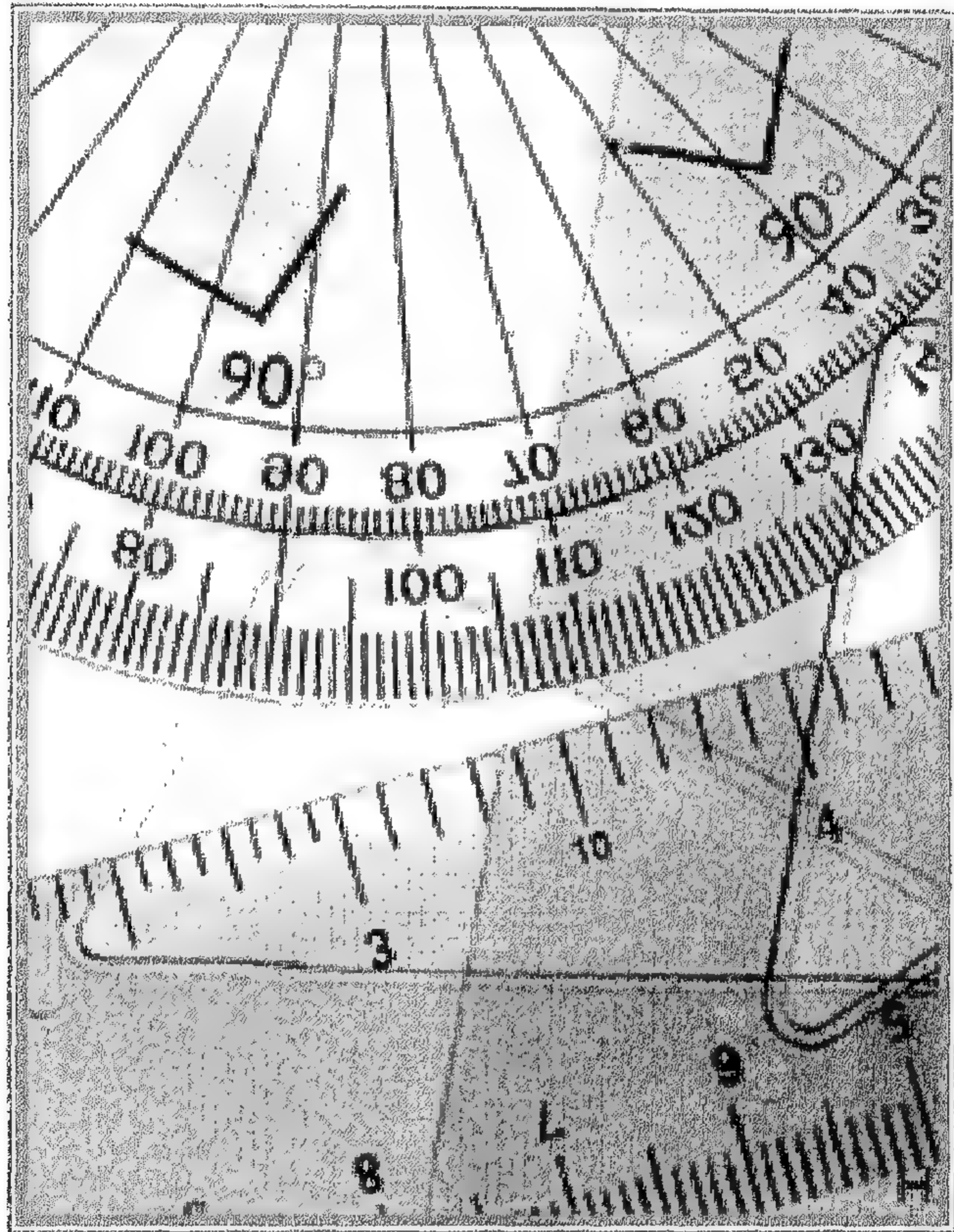
الشكل.

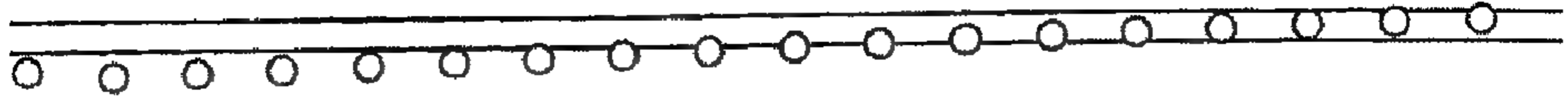
بين أن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

(٤٩) موشور رباعي مساحة قاعدته ١٣ د سم^٢ وارتفاعه ١٠ د سم احسب، حجمه

ومساحته الجانبية والكلية أيضاً.







(١٥ - ١) المتتالية والمتسلسلة

المتتالية: Sequence

يُصادفنا في الحياة العملية الكثير من الأعداد الحقيقية المرتبة حسب قانون أو قاعدة في معظم الأحيان، ولنفرض أن الطبيب سعدون يناوب في أحد المستشفيات ليلة واحدة من كل خمس ليال متتالية، وقد بدأ بالمناوبات الليلية ليلة الأول من شهر كانون الثاني، والسؤال هو: هل يناوب الطبيب المذكور ليلة السادس والعشرين من ذلك الشهر؟

الجواب، من الطبيعي أن تقوم بترتيب الليالي التي يناوب فيها الطبيب سعدون خلال ذلك الشهر كما يلي:

١، ٦، ١١، ١٦، ٢١، ٢٦، ٣١، ومن الترتيب نلاحظ أنه يناوب في ليلة السادس والعشرين من ذلك الشهر، هذا المثال وأمثاله العديدة يُدلل على خاصية لترتيب الأعداد على نمط أو نسق معين نسميه متتالية.

فالمتتالية أعداد حقيقية مرتبة وفق قاعدة ضمنية أو صريحة أو بلا قاعدة أحياناً أخرى.

وأما بلغة الاقترانات فالمتتالية اقتران مجاله الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها على الصورة $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ومداها مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية ح.

أي أن المتتالية: اقتران من ط* ← ح

وعناصر مجموعة مجال الاقتران ط* أو أجزائها تسمى حدود المتتالية فالمتتالية السابقة: ١، ٦، ١١، ١٦، ٢١، ٢٦، ٣١ توضح ما يلي:

إن العدد الأول في المتتالية وهو (١) يُسمى الحد الأول ويرمز له بالرمز

ح، أو أ.



والعدد الذي يليه وهو (٦) يُسمى الحد الثاني ويرمز له بالرموز h_2 ،

٢١.

وهكذا:

إذ يرمز للحد العام في المتتالية بالرمز h_n أو a_n أحياناً.

والحد العام h_n : هو الحد الذي يولد جميع حدود المتتالية هكذا:

مثال: إذا كان الحد العام لمتتالية هو $h_n = n^2$ أوجد الحدود

الثلاثة الأولى منها وكان h_n اقتران مجاله \mathbb{N} ومداه \mathbb{N}

أي أن h_n : اقتران من $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

لذلك فإن $h_1 = 1^2 = 1$ الحد الأول

$h_2 = 2^2 = 4$ الحد الثاني

$h_3 = 3^2 = 9$ الحد الثالث

فالمتتالية هي: ١ ، ٤ ، ٩ ، ... ، h_n

إذا كان عدد حدود المتتالية منتهي أو مجال الاقتران (المتتالية)

مجموعة محدودة تسمى المتتالية منتهية مثل:

المتتالية: ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ٢٤

وإذا كان عدد حدود المتتالية غير منتهي أو مجال الاقتران (المتتالية)

مجموعة غير محدودة تسمى المتتالية غير منتهية مثل:

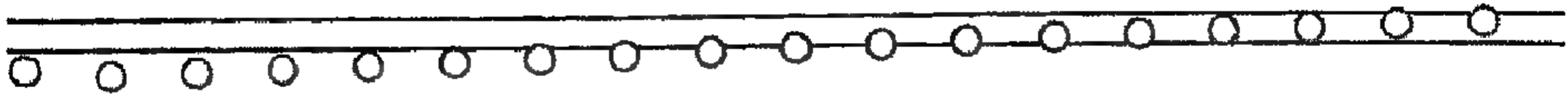
المتتالية: ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ٢٤ ، ... ، إلخ.

وبما أن المتتالية اقتران يمكن تمثيلها بيانياً على المستوى الديكارتي

بنقط منفصلة تمثل أزواجاً مرتبة مسقطها الأول المجال \mathbb{N} ومسقطها الثاني

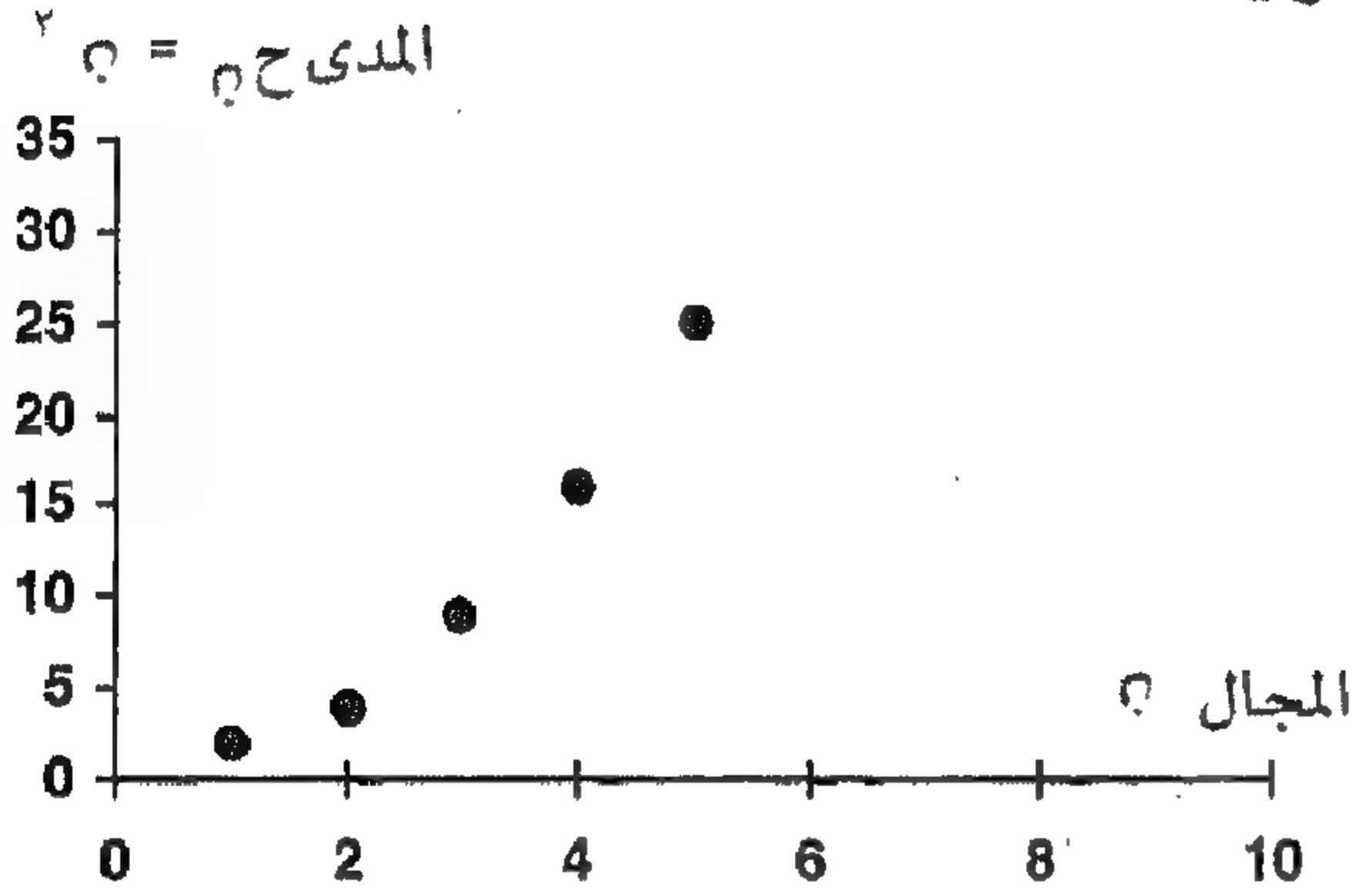


المتتاليات والمتسلسلات



المدى $=$ ح \cap ، وذلك بأن تُخصص محور السينات الموجب لمجال المتتالية (رتب الحدود فيها) وهو \cap ط* وتخصص محور الصادات لمدى المتتالية (قيم الحدود فيها) وهو ح \cap ط* وهكذا:

مثال: اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي حدها العام ح \cap = \cap^2 ومثل هذه المتتالية بيانياً بصورة جزئية.



$$1 = \cap^2(1) = \cap^2$$

$$4 = \cap^2(2) = 2\cap^2$$

$$9 = \cap^2(3) = 3\cap^2$$

$$16 = \cap^2(4) = 4\cap^2$$

$$25 = \cap^2(5) = 5\cap^2$$

وأبسط أشكال المتتاليات متتالية الأعداد الطبيعية ط* = 1 ، 2 ، 3 ، ...

...

أما المتسلسلة Series فهي: مجموعة من الحدود (حدود المتتالية) يرتبط كل منها بالحد الذي يسبقه والذي يليه بعملية رياضية ثابتة كأن تكون عملية جمع أو طرح، فالمتسلسلة متتالية حدودها ترتبط بالإشارتين + ، - بدلاً من الفواصل « ، » وأبسط أشكال المتسلسلات هي مجموعة الأعداد الطبيعية ط* بعد ربط كل عدد طبيعي فيها بالذي يليه بإشارة الجمع هكذا:

$$1 + 2 + 3 + \dots + \cap ، \cap \cap^2 ط*$$

فالمتسلسلة هي المجموع الدال على حدود المتتالية دون إيجاد هذا المجموع.

هذا ويستخدم رمز المجموع \sum للتعبير عن الصورة المختصرة





للمتسلسلة إذا كان لترتيبها حد عام هكذا:

مثال: $\sum_{r=1}^n r^2$ وبعد فكه تتولد المتسلسلة التالية:

$$^2(1) + ^2(2) + ^2(3) + \dots + ^2(n)$$

$$= 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$$

هذا وتلازم المتسلسلة المتتالية المرافقة في جميع الأوقات وكأنها والمتتالية سيان إلا أنها تختلف عنها كون حدود المتتالية مفصولة عن بعضها البعض بالواصل «،» وأما المتسلسلة فترتبط حدودها بالإشارات الموجبة هكذا:

متتالية الأعداد الأولية. $2, 3, 5, 7, \dots$

وأما $2 + 3 + 5 + 7 + \dots$ المتسلسلة الأعداد الأولية

مثال: أكتب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية والمتسلسلة المرافقة لها

والتي حدها العام $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2$

نجد الحدود:

$$u_1 = \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1$$

$$u_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$u_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

فالمتتالية: $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \left(\frac{1}{n}\right)^2$

المتسلسلة: $\left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2$

مثال: أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي حدها العام $u_n =$

المتتاليات والمتسلسلات



$$V = {}_1H$$

$$V = {}_2H$$

$$V = {}_3H$$

$$V = {}_4H$$

$$V = {}_5H$$

فالمتتالية: $V, V, V, V, V, V, V, \dots, V$

مثال: أكتب حدود المتسلسلة $\sum_{j=1}^V 2^j$ دون رمز المجموع

$$2 = {}_1H$$

$$4 = {}_2H$$

$$8 = {}_3H$$

$$16 = {}_4H$$

$$32 = {}_5H$$

$$64 = {}_6H$$

$$128 = {}_7H$$

$$128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 2 = \sum_{j=1}^V 2^j \therefore$$

دون إيجاد قيمة المجموع للحدود.





مثال: جد قيمة $\sum_{r=1}^2 ({}^2_r)$

نجد الحدود ونجمعها أيضاً ← معناه قيمة المجموع

قيمة $\sum_{r=1}^2 ({}^2_r) = ({}^2_1) + ({}^2_2) + ({}^2_3) + ({}^2_4)$

$100 =$

مثال: أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} ({}^{1-r}_2)$

$1 = ({}^1_1) = ({}^{1-1}_1) = {}^1_1$

$1 = ({}^1_2) = ({}^{1-2}_2) = {}^1_2$

$1 = ({}^1_3) = ({}^{1-3}_3) = {}^1_3$

$1 = ({}^1_4) = ({}^{1-4}_4) = {}^1_4$

$1 = ({}^1_5) = ({}^{1-5}_5) = {}^1_5$

فإن $\sum_{r=1}^{\infty} ({}^{1-r}_2) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$



(١٥ - ٢) المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

المتتالية الحسابية Arithmetic Sequence

هي مجموعة من الأعداد الحقيقية المرتبة بطريقة يمكن الحصول على أي حد منها بإضافة عدد موجب أو سالب إلى العدد السابق له مباشرة:

وهذا العدد الموجب أو السالب يُسمى أساس المتتالية الحسابية ويرمز له بالرمز k وهذه الأعداد المرتبة تسمى حدود المتتالية الحسابية.

حدها الأول يرمز له بالرمز a دائماً أو u_1 ورتبته ١

وحدها الثاني يرمز له بالرمز u_2 ورتبته ٢ وهكذا

وإن حدود المتتالية الحسابية مرتبة بحيث أن الفرق بين أي حدين متتاليين فيها يساوي الأساس وهو عدد ثابت كما في المثال:

الأعداد ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ... تكون متتالية حسابية

لأن الحد الثاني - الحد الأول = الحد الثاني - الحد الثاني =

أي أن $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \dots$

كون $8 - 5 = 11 - 8 = 3$

وكأنك تستطيع أن تكون متتالية حسابية بإضافة الأساس « k » إلى كل حد

سابق لينتج الحد اللاحق له هكذا وبالرموز.

الحد الأول $u_1 = a$ دائماً $= a + (1 - 1)k$

الحد الثاني $u_2 = a + k = a + (2 - 1)k$

المتتاليات والمتسلسلات



$$\text{الحد الثالث } H_3 = A + 2K = A + K + K = K(1 - 2) + A$$

$$\text{الحد الرابع } H_4 = A + 3K = A + K + K + K = K(1 - 3) + A$$

$$\text{الحد النوني } H_n = A + (n-1)K$$

ويسمى H_n باسم الحد العام General Term

$$\text{ومنه: } H_n = A + (n-1)K \quad \text{حيث}$$

A : الحد الأول

K : الأساس

n : عدد الحدود أو رتبة الحد العام

ويستخدم الحد العام في إيجاد قيمة أي حد من حدود المتتالية الحسابية دون اللجوء إلى معرفة قيم الحدود السابقة أو اللاحقة له.

مثال: أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية: ٥، ٨، ١١، ١٤،

بما أن $A = 5$ الحد الأول

$$K = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 3 \text{ الأساس}$$

فهي بالتأكيد حسابية

$$\therefore H_n = A + (n-1)K$$

$$H_3 = 5 + (3-1)K = 5 + 2K$$

$$H_3 = 5 + 2K = 11 \quad \text{الحد العام ومنه:}$$

$$11 = 5 + 2K \Rightarrow 6 = 2K \Rightarrow K = 3$$

$$H_6 = 5 + (6-1)K = 5 + 5 \times 3 = 20 \quad \text{وهكذا.}$$





أما المتسلسلة الحسابية Arithmetic Series

فترتبط بالمتتالية الحسابية ارتباطاً وثيقاً إذ تنبثق عنها بعد تبديل الفواصل «،» بين حدود المتتالية بالإشارة «+» هكذا

فإذا كانت المتتالية الحسابية على الصورة: ٢، ٧، ١٢، ...، (٥٠ - ٣)

فالمتسلسلة الحسابية تكون على الصورة: ٢ + ٧ + ١٢ + ... + (٥٠ - ٣)

ويمكن التعبير عن المتسلسلة الحسابية باستخدام رمز المجموع \sum

دون إيجاد قيمة المجموع هكذا:

$$٢ + ٧ + ١٢ + ... + (٥٠ - ٣) = \sum_{i=1}^{٥٠} (٣ - ٥)$$

وكان لكل متتالية حسابية هناك متسلسلة حسابية مرافقة والعكس صواب.

للمتتالية الحسابية ١، ٢، ٣، ...، ٥

هناك متسلسلة الحسابية ١ + ٢ + ٣ + ... + ٥

أو للمتسلسلة الحسابية ٢ + ٤ + ٦ + ... + ١٠

هناك متتالية حسابية ٢، ٤، ٦، ...، ١٠

والحد العام $u_n = (n - ١) + ١$ هو للمتتالية الحسابية والمتسلسلة الحسابية أيضاً.

مثال: أكتب المتسلسلة الحسابية التالية دون استخدام رمز المجموع \sum

$$٣^١ + ٣^٢ + ٣^٣ + ٣^٤ + ٣^٥ = \sum_{i=1}^٥ ٣^i$$

المتتاليات والمتسلسلات



$$15 + 12 + 9 + 6 + 3 =$$

وهي متسلسلة حسابية حدها الأول $a = 3$ ، وأساسها $d = 3$ ، $3 = 6 - 3 = 9 - 6 = 12 - 9 = 15 - 12$

مثال: أكتب حدود المتسلسلة التالية $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$ دون استخدام

رمز المجموع.

بما أن المتسلسلة لا نهائية فإننا نكتفي بكتابة الحدود الثلاثة الأولى على الأقل ونتبعها بثلاث نقط كونهما علامة الحذف باللغة العربية هكذا.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots$$

$$= 3 + 9 + 27 + \dots$$

مثال: أي من المتتاليات أو المتسلسلات الآتية حسابية:

$$(1) \quad 3 - 4 = 1$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$$

$$(3) \quad 1 + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-1\right)$$

الطريقة: نجد الحدود الثلاثة الأولى والأساس فإذا كان الفرق بين كل

حدين متتاليين ثابت هو k أي $a_n - a_{n-1} = k$ كانت حسابية وإلا فلا.

أولاً:

$$3 - 4 = 1$$

$$1 - 2 = -1$$





$$5 = 3 - (2)4 = 3$$

$$9 = 3 - (3)4 = 3$$

$$\text{الأساس} = 5 - 9 = 1 - 5 = 4$$

فالمتتالية ١ ، ٥ ، ٩ ، حسابية

$$\text{وح } 4 = 1 + (n-1)4 = 4n - 3$$

$$4 - 3 = 1 \text{ كما هو وارد بالسؤال.}$$

ثانياً:

$$7 + 7 + 7 + \dots = 7 \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

$$7 - 7 = 0 = 7 - 7$$

فالمتسلسلة ٧ + ٧ + ٧ + حسابية

وحدها العام:

والحد العام

$$\text{ح } 7 = 1 + (n-1)7$$

$$7 = 1 + (n-1)7 \text{ كما هو وارد بالسؤال}$$

ثالثاً:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-1\right)$$

$$\text{الأساس: } 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

المتتاليات والمتسلسلات



$$1 - = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} -$$

$$\frac{1}{2} - = \frac{1}{2} + 1 - = (\frac{1}{2} -) - 1 -$$

فالأساس غير ثابت فالمتسلسلة غير حسابية.

مثال: ما هو عدد حدود المتسلسلة الحسابية التالية ؟

$$(512 -) + \dots + (2 -) + 2 + 8$$

الحد العام هو ما نريد وهو الحد الأخير

$$5 - = 3 - 2 - = 8 - 3 = 5, 8 = 1$$

والحد الأخير هو الحد العام رتبته هي ح

$$5(1 - 2) + 1 = ح$$

$$(5 -)(1 - 2) + 8 = 512 -$$

ومنها $2 = 105$ حدود.

الوسط الحسابي والأوساط الحسابية لعددتين حقيقيين

الوسط الحسابي لعددتين حقيقيين Arithmetic Means

ويسمى أحياناً المعدل Average

ويرمز له بالرمز س.

ويُعرف س بأنه مجموع العددتين مقسوماً على 2.

$$أوس = \frac{أ + ب}{2} \text{ حيث العددين الحقيقيين } أ, ب$$

والوسط الحسابي لعددتين هو العدد الحقيقي الذي يُحصر بينهما

المتتاليات والمتسلسلات



التشكل الأعداد الثلاثة هو والعديدين متتالية حسابية.

مثال: أوجد الوسط الحسابي للعديدين ٦، ١٢

وكأن ٦، س، ١٢ متتالية حسابية

$$\text{لذا فإن } س - ٦ = ١٢ - س$$

$$س + س = ٦ + ١٢$$

$$٢س = ١٨$$

$$س = ٩$$

$$\text{أو بإيجاز شديد: } س = \frac{١٨}{٢} = \frac{١٢+٦}{٢} = \frac{أ+ب}{٢}$$

أما الأوساط الحسابية Arithmetic Means لعديدين فهني الأعداد

الحقيقية س_١، س_٢، س_٣، س_٦ التي تشكل مع العديدين متتالية حسابية.

أي أن أ، س_١، س_٢، س_٣، س_٦، ب متتالية حسابية.

وأما الحل فيكون كالتالي:

مثال: أدخل بين العديدين ١٠، ٣٨ ستة أوساط حسابية.

الحل: ٦ أوساط حسابية + العديدين = ٨ حدود

عدد حدود المتتالية الحسابية ١٠، س_١، س_٢،، س_٦، ٣٨ هو ٨ حدود.

$$\text{حدها الأول } أ = ١٠$$

$$\text{حدها الثامن } ح = ٣٨ = ٥(١ - ٨) + أ = ٥٧ + أ$$





$$\text{أي أن } 38 = 10 + 28$$

$$38 - 10 = 28 = 2 \times 14$$

ومنها $k = 4$ الأساس

فالأوساط الحسابية: 14، 18، 22، 26، 30، 34 الستة

■ مجموع المتسلسلة الحسابية Sum of A. S.

للمتسلسلة الحسابية بشكل خاص - ودون المتتالية الحسابية - يمكن إيجاد مجموع أي عدد من حدودها الأولى بالقانون.

إذا رمزنا لمجموع n من حدودها الأولى بالرمز S_n

والحد الأول بالرمز a كما أسلفنا ولحدها الأخير (العام) u_n

فإن $S_n = \frac{n}{2} (a + u_n)$ ولما كان الحد الأخير (العام) u_n

$$u_n = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2} \{a + (a + (n-1)d)\}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

مثال: أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى للمتسلسلة الحسابية:

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$$

هناك طريقتان للحل:

$$\text{الأولى: } a = 5, d = 5$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (5 + 50) = 275$$

المتتاليات والمتسلسلات

$$\text{ح.} = \frac{10}{2} = \{ 50 + 5 \} 5 = (55) 5 = 275$$

الثانية: ح₁ = أ = 5 = (1) 5 =

$$10 = 5$$

$$\text{ح.} = 5 = (2) 5 = 10$$

$$\text{ومنه } 5 = 10 - 5 = 5$$

$$\therefore \text{ح.} = \frac{10}{2} = \{ 5(1 - 10) + (5) 2 \} 5 = (45 + 10) 5 =$$

$$275 = (55) 5 =$$

والطريقتان تؤديان إلى نفس النتيجة كما ترى.

مثال: أوجد العشرين حد الأولى من المتسلسلة

$$6 + 10 + 14 + \dots$$

$$\text{ح.} = أ = 6 =$$

$$5 = 10 - 6 = 4$$

$$\text{ح.} = \frac{20}{2} = \{ 6(1 - 20) + (6) 2 \} 4 =$$

$$880 = (88) 10 = \{ 76 + 12 \} 10 =$$

مثال تطبيقي:

إذا كان دخل سائد السنوي ١٠٠٠ دينار وكان يتزايد بمقدار ١٥٠ ديناراً سنوياً فإذا كان يدخر من دخله ٨٪ سنوياً أوجد مُدخراته في نهاية عشرين عام.

المتتاليات والمتسلسلات



$$\text{مدخراته خلال السنة الأولى} = 1000 \times \frac{8}{100} = 80 \text{ دينار}$$

$$\text{مدخراته خلال السنة الثانية} = (1000 + 80) \times \frac{8}{100} =$$

$$= 1150 \times \frac{8}{100} = 92 \text{ دينار}$$

$$\text{مدخراته خلال السنة الثالثة} = (1000 + 1150) \times \frac{8}{100} =$$

$$= 1200 \times \frac{8}{100} = 104 \text{ دينار}$$

فالمدخرات تشكل متسلسلة حسابية هكذا

$$80 + 92 + 104 + \dots \text{حتى } 20 \text{ عام.}$$

$$a_1 = 80$$

$$d = 92 - 80 = 104 - 92 = 12 \text{ دينار}$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \{ (12)(1 - 20) + (2) 80 \} = 10(228 + 160) =$$

$$= 3880 \text{ دينار}$$

(١٥ - ٣) المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

المتتالية الهندسية Geometric Sequence

مجموعة من الأعداد الحقيقية مرتبة بطريقة يمكن الحصول على أي عدد منها بضرب العدد السابق له مباشرة بعدد حقيقي ثابت موجب أو سالب يسمى

أساس المتتالية الهندسية Common Ratio of an G. S

ويرمز له بالرمز «ر» وهذه الأعداد المرتبة تُسمى حدود المتتالية الهندسية وحدها الأول $a_1 = a$ دائماً.

وهذا الأساس «ر» هو النسبة الثابتة بين أي حدين متتاليين من حدودها



المتتاليات والمتسلسلات



هكذا: للمتتالية الهندسية $ح_1, ح_2, ح_3, \dots$

$$ف ر = \frac{ح_2}{ح_1} = \frac{ح_3}{ح_2} = \dots$$

فالأعداد ٣، ٦، ١٢، ... تشكل متتالية هندسية حدها الأول $أ = ٣$

$$وأساسها ر = \frac{٦}{٣} = \frac{١٢}{٦} = ٢$$

وكأنك تستطيع تكوين المتتالية الهندسية إذا علمت حدها الأول $أ =$

وأساسها $ر =$ ، هكذا

$$ح_1 = أ \quad أ ر^{١-١} = أ ر^٠ =$$

$$ح_2 = (أ) (ر) = أ ر \quad أ ر^{٢-١} = أ ر^١ =$$

$$ح_3 = (أ) (ر) (ر) = أ ر^٢ \quad أ ر^{٣-١} = أ ر^٢ =$$

⋮

$ح_n = أ ر^{n-١}$ ويسمى الحد العام للمتتالية الهندسية General Term of G. s

ومنه يمكن إيجاد أي حد بالمتتالية دون الرجوع إلى الحدود السابقة

أو اللاحقة له هكذا.

مثال: أوجد $ح_n$ من المتتالية الهندسية ٥، ١٠، ٢٠، ٤٠، ...

أولاً نجد الحد العام: $ح_n$

$$أ = ٥$$

$$ر = \frac{١٠}{٥} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$$

$$\therefore ح_n = أ ر^{n-١} = (٥) (٢)^{n-١} = (٥) (٢)^{١-٢}$$



$$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \left(\frac{0}{2} \right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \frac{0}{2} =$$

$$ومنه ح. = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \left(\frac{0}{2} \right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \left(\frac{0}{2} \right) = (32) (0) = (16) (0) = 80$$

الوسط الهندسي لعددین موجبین أو سالبین معاً والأوساط الهندسية الأخرى.

الوسط الهندسي للعددین أ، ب هو العدد «ي» والذي يشكل مع العددین المذكورین متتالية هندسية هكذا: أ، ي، ب متتالية هندسية.

$$\text{أساسها: } \frac{ي}{أ} = \frac{ب}{ي} \text{ وبالضرب التبادلي}$$

$$(ي)^2 = أب$$

ومنه ي = $\sqrt{أب}$ ومن هنا جاء الشرط التالي موجبین أو سالبین معاً.

حتى يكون $\sqrt{أب} = \sqrt{(أ-)(ب-)} = \sqrt{أب}$ عدد حقيقي.

مثال: أوجد الوسط الهندسي للعددین: - ٣، - ٢٧

$$ي = \sqrt{(٣-)(٢٧-)} = \sqrt{٨١} = ٩ \pm$$

أو - ٣، ي، - ٢٧ متتالية هندسية

$$\frac{ي}{٣-} = \frac{٢٧-}{ي}$$

$$ي^2 = (٣-)(٢٧-)$$

$$\therefore ي = \sqrt{(٣-)(٢٧-)} = \sqrt{٨١} = ٩ \pm$$

وبشكل عام إذا كانت الأعداد أ، س_١، س_٢، س_٣، ... س_٦، ب

متتالية هندسية فإن الأعداد س_١، س_٢، س_٣، ... س_٦ تسمى أوساطاً

هندسية بين العددین أ، ب حيث أ، ب لهما نفس الإشارة في نفس الوقت

(متفقان بالإشارة)





مثال: أدخل أربعة أوساط هندسية بين العددين ٣، ٩٦

المتتالية الهندسية ٣، s_1 ، s_2 ، s_3 ، s_4 ، ٩٦

حدها الأول $A = 3$

حدها السادس $H = 96$

لكن $H = A r^{n-1} = 3 r^5 = 96$

أي $\frac{96}{3} = (r)^5 \rightarrow r^5 = 32 = 2^5$ الأساس $r = 2$

ومنه $s_1 = 3(2) = 6$

$s_2 = 6(2) = 12$

$s_3 = 12(2) = 24$

$s_4 = 24(2) = 48$

أي أن ٦، ١٢، ٢٤، ٤٨ الأوساط الهندسية المطلوبة

هناك ملحوظة تتبادر إلى الأذهان يمكن صياغتها على شكل سؤال

هكذا: ما العلاقة بين الوسطين الحسابي والهندسي لعددين موجبين؟

العلاقة تكمن في متباينة الوسط الحسابي والهندسي A and G Inequality

والتي مفادها:

لكل من العددين الحقيقيين الغير سالبين أ، ب فإن الوسط الحسابي لهما

أكبر من أو يساوي الوسط الهندسي لهما هكذا:

$$\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$$

والبيان كما في المثال:

المتتاليات والمتسلسلات



مثال: أكتب المتسلسلة الهندسية $\sum_{r=1}^5 3^r$ دون رمز المجموع.

$$3 = 3^1 = 3$$

$$9 = 3^2 = 9$$

$$27 = 3^3 = 27$$

$$81 = 3^4 = 81$$

$$243 = 3^5 = 243$$

$$243 + 81 + 27 + 9 + 3 = \sum_{r=1}^5 3^r$$

$$3 = \frac{9}{3} = \text{أساسها } r$$

مثال: أكتب المتسلسلة التالية دون استخدام رمز المجموع $\sum_{r=1}^{\infty} 3^r$

بما أنها متسلسلة هندسية غير منتهية لذا لا يمكن كتابة جميع حدودها بل نكتفي بكتابة ثلاثة منها على الأقل ونتبعها بثلاث نقط كونها علامة الحذف في اللغة العربية هكذا:

$$3 + 9 + 27 + \dots = \sum_{r=1}^{\infty} 3^r$$

$$3 + 9 + 27 + \dots =$$

في المتسلسلة الهندسية - دون المتتالية الهندسية - يمكن إيجاد مجموع أي عدد من حدودها الأولى وبالقانون:

إذا رمزنا لمجموع S_n من الحد الأول لمتسلسلة هندسية بالرمز S_n



المتتاليات والمتسلسلات



$$\text{فإن } ح = \frac{أ(١ - ر^n)}{١ - ر} \quad \text{حيث } ر > ١$$

أو

$$\text{حيث } ر < ١ \quad ح = \frac{أ(١ - ر^n)}{١ - ر}$$

ولتجنب الإشارات السالبة في البسط والمقام

كون $ر$ بالحالتين لا تساوي العدد ١ أي $ر \neq ١$

حتى لا يصبح المقام في كليهما = صفر.

مثال: أوجد الثامن من المتسلسلة $٣ + ٦ + ١٢ + ٠٠٠٠$

حدها الأول = $أ = ٣$

$$\text{أساسها} = \frac{٦}{٣} = \frac{١٢}{٦} = ٢ = ر$$

$$\text{فهي هندسية حدها العام: } ح = أ ر^{n-١} = ٣(٢)^{٨-١} = ٣ \times ٢^٧ = ٣٨٤$$

مثال: أوجد مجموع أول ثمانية حدود من المتسلسلة $١ + ٢ + ٤ + ٠٠٠$

حدها الأول = $أ = ١$

$$\text{أساسها} = \frac{٢}{١} = \frac{٤}{٢} = ٢ = ر$$

كون $ر < ١$

$$\therefore ح = \frac{أ(١ - ر^n)}{١ - ر} \quad \text{حيث } ر > ١$$

$$\therefore ح = \frac{١ - ٢٥٦}{١ - ٢} = \frac{(١ - ٢^٨)(١)}{١ - ٢} = ٢٥٥$$

وفي السياق ستناقش العلاقة بين المتسلسلة الهندسية والرياضيات

المالية وفوائدها من حيث، ادخار الأموال في المصارف والمؤسسات المالية،



وسيتم النقاش من خلال مفهومين:

المفهوم الأول: القيمة المستقبلية لدفعات منظمة « Future Value of an

« Ordinary Annuity

وهو جملة مبالغ تستثمر في البنوك في انتظام كما في هذا المثال:

مثال: يوفر حسام في كل شهر مبلغ ١٠٠ دينار من عمله الإضافي ويودعها في نهاية كل شهر لدى أحد البنوك بفائدة مركبة معدلها ٣٪ سنوياً تحسب كل شهر، كم تبلغ جملة ما يوفره حسام في سنة واحدة.

الحل والتفسير:

الدفعة الأولى ١٠٠ دينار تحتسب فوائدها لمدة ١٢ - ١ = ١١ شهر

حيث تودع في نهاية الشهر الأول

الدفعة الثانية ١٠٠ دينار تحتسب فوائدها لمدة ١٢ - ٢ = ١٠ شهور

حيث تودع في نهاية الشهر الثاني

الدفعة الثانية ١٠٠ دينار تحتسب فوائدها لمدة ١٢ - ٣ = ٩ شهور

حيث تودع في نهاية الشهر الثالث.

وهكذا حتى أن الدفعة الثانية عشر (الأخيرة) لا تحتسب عليها فوائد

كونها أودعت في نهاية السنة ١٢ - ١٢ = صفر شهر تبقى في البنك.

$$\text{ومعدل الفائدة الشهري} = \frac{ف}{ك} = \frac{٠,٠٣}{١٢} = \frac{٠,٠٠٢٥}{١} = ٠,٠٠٢٥$$

وعليه فإن:

$$\text{جملة الدفعة الأولى} = م (١,٠٠٢٥)^? = ١٠٠ (١,٠٠٢٥)^{١١}$$



المتتاليات والمتسلسلات



$$= \text{جملة الدفعة الثانية} = 100 (1,0025)^1$$

$$= \text{جملة الدفعة الثالثة} = 100 (1,0025)^2$$

⋮

$$= \text{وجملة الدفعة الأخيرة} = 100 (1,0025)^n$$

$$100 + 100 (1,0025)^1 + 100 (1,0025)^2 + \dots + 100 (1,0025)^n = \text{عند جمع جملة الدفعات ح } n$$

ولا مانع بتغيير أماكن الحدود هكذا: الأخير يصبح إلى ٠٠٠٠

$$100 + 100 (1,0025)^1 + 100 (1,0025)^2 + \dots + 100 (1,0025)^n = \text{ح } n$$

والتي تمثل مجموع متسلسلة هندسية حدها الأول أ = 100

وأساسها ر = 1,0025 وعدد حدودها n = 12

$$\text{واستخدام القانون ح } n = \frac{أ (ر^n - 1)}{ر - 1} = \frac{100 \{1 - (1,0025)^{12}\}}{1 - 1,0025}$$

$$= 1216,64 \text{ دينار تقريباً}$$

ولكن توخياً للإيجاز وعدم الإسهاب نستخدم القانون التالي:

$$\text{ج} = \frac{م \{1 - (ف + 1)\}}{ف}$$

حيث: ج = القيمة المستقبلية لدفعات منتظمة

م = القيمة الحالية لكل دفعة

ف = معدل الفائدة المركبة عن وحدة الزمن

n = عدد الدفعات في مدة الاستثمار.

المتتاليات والمتسلسلات

$$\frac{100 \{1 - (1,0025 + 1)\}}{1,0025} = \text{ومنها ج}$$

$$\frac{100 \{1 - {}^{12}(1,0025)\}}{1,0025} =$$

وباستخدام الآلة الحاسبة ينتج الجواب السابق.

مثال: يقوم حسن بإيداع مبلغ ٢٠٠٠ دينار كل نصف سنة لدى أحد البنوك بفائدة مركبة معدلها السنوي ٤٪ تحسب الفوائد كل نصف سنة: احسب جملة الدفعات في نهاية ٥ سنوات والفائدة المركبة التي يحصل عليها.

$$\begin{aligned} \text{م} = 2000 \text{ دينار، ف} &= \frac{0,04}{2} = 0,02 \\ 10 = 2 \times 5 &= \text{فترات زمنية.} \\ \text{ج} &= \frac{2000 \{1 - {}^{10}(1,02)\}}{0,02} = \frac{(1 - 1,2189) 2000}{0,02} \end{aligned}$$

$$= \frac{(0,2189) 2000}{0,02} = \frac{21,89 \times 2000}{0,2} = 21890 \text{ دينار}$$

ف مركبة = الجملة - المبالغ

$$= 21890 - 10 (2000)$$

$$= 21890 - 20000 = 1890 \text{ دينار}$$

المفهوم الثاني: القيمة الحالية لدفعات منتظمة « Present Value of an Ordinary

«Annuity

وهو المبلغ من المال الذي يجب استثماره اليوم بفائدة مركبة معينة ولفترة زمنية محددة بهدف الحصول على دفعات (أقساط) منتظمة وتحسب القيمة الحالية للدفعة رقم n بالعلاقة:

$$107$$

المتتاليات والمتسلسلات



القيمة الحالية ح = مبلغ الدفعة (١ + ف) ^{-١}

حيث ف: معدل الفائدة المركبة للفترة الزمنية

مثال: يريد سهاد استثمار مبلغ من المال في أحد البنوك بفائدة مركبة معدلها السنوي ٦٪ وتحسب فوائدها كل شهر لكي يسدد أقساطاً شهرية قيمة كل منها ٢٠٠ دينار تسحب من رصيده في نهاية كل شهر ولمدة سنة فما قيمة المبلغ الذي يجب على سهاد إيداعه في البنك الآن وما المبلغ الذي سوف يوفره بهذه العملية التجارية ؟

الحل والتفسير: عدد الدفعات الشهرية = ١٢ ومبلغ كل منها = ٢٠٠ دينار

$$\text{معدل الفائدة} = \text{ف} = \frac{0.06}{12} = 0.005 \text{ شهرياً}$$

$$\frac{200}{1.005} = 1^{-1} (1.005) 200 = \text{القيمة الحالية للدفعة الأولى}$$

$$\frac{200}{1.005^2} = 2^{-1} (1.005) 200 = \text{القيمة الحالية للدفعة الثانية}$$

$$\frac{200}{1.005^3} = 3^{-1} (1.005) 200 = \text{القيمة الحالية للدفعة الثالثة}$$

⋮

$$\frac{200}{1.005^{12}} = 12^{-1} (1.005) 200 = \text{القيمة الحالية للدفعة الأخيرة}$$

وقيم هذه الدفعات تشكل متسلسلة هندسية حدها الأول = أ = $\frac{200}{1.005}$

$$\text{وأساسها } r = \frac{1}{1.005} \text{ وعدد حدودها } n = 12$$

$$\therefore \text{ج ١٢} = \frac{\left(\frac{200}{1.005} \right) \left(1 - \left(\frac{1}{1.005} \right)^{12} \right)}{1 - \frac{1}{1.005}} = \frac{أ (1 - r^n)}{1 - r}$$

= ٢٣٢٣,٧٩ دينار تقريباً وبعد استخدام الآلة الحاسبة.





أي أن سهاد يدفع الآن ٢٣٢٣,٧٩ دينار مقابل أن يأخذ كل شهر ولمدة سنة مبلغ ٢٠٠ دينار.

ويكون المبلغ الذي وفره سهاد = مجموع الأقساط الشهرية - القيمة الحالية للدفعات (المبلغ الذي أودعه في البنك الآن)

$$= (١٢ \times ٢٠٠) - ٢٣٢٣,٧٩ = ٧٦,٢١ \text{ دينار تقريباً.}$$

مثال: قرّر عماد شراء غرفة نوم جديدة لأطفاله الصغار فاتفق مع صاحب معرض للأثاث أن يدفع شهرياً ١٠٠ دينار ولمدة سنة، فقام بإيداع مبلغ معين في بنك يعطي فوائد مركبة ٩٪ سنوياً تحسب الفوائد كل شهر ليسحب مبلغ القسط الشهري منه في نهاية كل شهر.

احسب المبلغ (القيمة الحالية للدفعات) الذي يودعه في البنك ؟

الحل والتفسير: عدد الدفعات الشهرية = ١٢، مبلغ كل دفعة ١٠٠ دينار.

$$\text{معدل الفائدة المركبة شهرياً} = \frac{٠,٠٩}{١٢} = \frac{٩}{١٢٠٠} = ٠,٠٠٧٥ \left(\frac{٣}{٤} \right) \%$$

$$\text{القيمة الحالية للدفعة الأولى} = ١٠٠ \cdot (١,٠٠٧٥)^{-١} = \frac{١٠٠}{١,٠٠٧٥}$$

$$\text{القيمة الحالية للدفعة الثانية} = ٢٠٠ \cdot (١,٠٠٧٥)^{-٢} = \frac{١٠٠}{(١,٠٠٧٥)^٢}$$

$$\text{القيمة الحالية للدفعة الثالثة} = ٢٠٠ \cdot (١,٠٠٧٥)^{-٣} = \frac{١٠٠}{(١,٠٠٧٥)^٣}$$

⋮

$$\text{القيمة الحالية للدفعة الأخيرة} = ٢٠٠ \cdot (١,٠٠٧٥)^{-١٢} = \frac{١٠٠}{(١,٠٠٧٥)^{١٢}}$$

$$\therefore \text{ج ١٢ (القيمة الحالية للدفعات)} = \frac{\frac{١٠٠}{١,٠٠٧٥} \left(1 - \frac{١}{(١,٠٠٧٥)^{١٢}} \right)}{١ - \frac{١}{١,٠٠٧٥}}$$



المتتاليات والمتسلسلات



$$\frac{99 - \frac{99}{1^2(1.0075)}}{0.01 -} = \frac{\{1 - \frac{1}{1^2(1.0075)}\} 99}{1 - 0.99} =$$

$$\frac{111.7 - 99}{1.23} = \frac{\frac{99}{1} - \frac{99}{1.23}}{0.01 -} =$$

$$\frac{1}{0.01 -} \times \frac{12.7 -}{1.23} =$$

$$1033 \text{ دينار} = \frac{127000}{123} =$$

(١٥ - ٤) المتسلسلة الهندسية اللانهائية التقاربية Convergent Infinite G. s

إنها المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي يقل فيها كل حد عن سابقه كون أساسها r يحقق المتباينة $|r| > 1$ أو $-1 < r < 1$ أو $r \in (-1, 1)$ وبالتالي فإنها تقترب من عدد حقيقي.

مثال: المتسلسلة $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

(١) هندسية كون أساسها $\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1}$ النسبة بين كل حدين متتاليين

(٢) تقاربية لأنه كلما ازدادت حدود المتسلسلة بالعدد بشكل كبير فإن مجموعها يقترب من العدد ٢ كما يلي:

ج ١ = ١ مجموع الحد الأول إن جاز التعبير

ج ٢ = $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ مجموع الحد الأول والثاني



المتتاليات والمتسلسلات

مجموع الحدود الثلاثة الأول والثاني والثالث	ج ٢ = $\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
مجموع الحدود الأربعة الأولى	ج ٤ = $\frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$
مجموع الحدود الخمسة الأولى	ج ٥ = $\frac{7}{8} = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}$
مجموع الحدود الستة الأولى	ج ٦ = $\frac{15}{16} = 1 + \frac{1}{32} = \frac{33}{32}$
مجموع الحدود السبعة الأولى	ج ٧ = $\frac{31}{32} = 1 + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$
ومما سبق فإن ج \rightarrow تقترب ٢	

عند \rightarrow تقترب ∞

أو أنها ج \rightarrow ٢ =

$\infty \leftarrow$ ؟

لذلك فإن ج \rightarrow ∞ = (مجموع جميع حدود المتسلسلة اللانهائية التقاربية)

$$\frac{1}{r-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

وأما حدها العام ج \rightarrow $r^n = 1$ كالماتتاليات والمتسلسلات المنتهية تماماً.

مثال: أوجد الحد السابع في المتسلسلة

$$120 + 60 + 30 + \dots$$

$$120 = a, \quad r = \frac{60}{120} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\therefore \text{ج } 7 = a r^{n-1} = 120 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} = 120 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 120 \times \frac{1}{64} = \frac{15}{8}$$



$$\frac{15}{8} = \left(\frac{1}{64} \right) (120) =$$

مثال: أوجد الحد السابع للمتسلسلة

$$120 + (-60) + 30 + (-15) + \dots$$

$$a = 120, r = \frac{-60}{120} = -\frac{1}{2} \quad |r| = \frac{1}{2} < 1$$

$$\therefore \text{ح} = a \cdot r^{n-1} = 120 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 120 \cdot \left(-\frac{1}{32}\right) = -\frac{15}{4}$$

هذا ويمكن كتابة المتسلسلة الهندسية اللانهائية التقاربية باستخدام رمز

المجموع شرط أن $|r| < 1$ هكذا.

$$\dots + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\dots + \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} =$$

ومن أشهر التطبيقات على مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية التقاربية

هو عملية تحويل الكسر العشري الدوري إلى صورة كسر عادي (عدد نسبي)

هكذا:

مثال: أكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{3}$ على صورة كسر عادي (عدد

نسبي $\frac{a}{b}$)

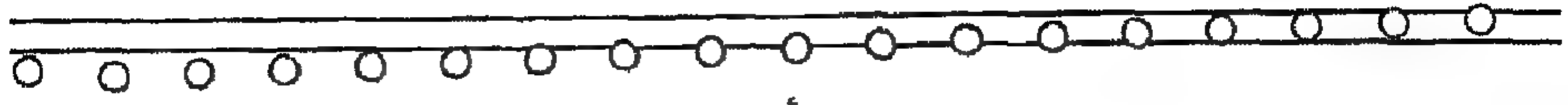
$$0.\overline{3} = 0.3333\dots$$

$$\text{فإن } 0.\overline{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

$$\text{وهذه متسلسلة هندسية كون أساسها } \frac{1}{10} = \frac{3}{30} = \frac{0.3}{3} = r$$

ولا نهائية تقاربية كون $|r| < 1$





فإن مجموعها $\frac{1}{r-1} = 0,3 = \infty$ $|r| > 1$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{0,3}{0,1-1} = 0,3 \therefore$$

«تحقق بتحويل $\frac{1}{3}$ إلى كسر عشري دوري بقسمة البسط على المقام ٣»

مثال: أكتب الكسر العشري الدوري $0,1\overline{42}$ على صورة كسر عادي

(عدد نسبي $\frac{a}{b}$)

$$0,1\overline{42} = 0,1424242000 = 0,1\overline{42}$$

$$\text{فإن } 0,1\overline{42} = \frac{1}{10} + \left(\frac{42}{10000} + \frac{42}{100000} + \frac{42}{1000000} + \dots \right)$$

$$= \left(\frac{42}{10} + \frac{42}{100} + \frac{42}{1000} + \dots \right) + \frac{1}{10} =$$

$$r = 10^{-2} = \frac{1}{100} \text{ أساس المتسلسلة الهندسية}$$

$$\therefore 0,1\overline{42} = 0,1 + \frac{1}{r-1}$$

$$= \frac{0,042}{0,99} + 0,1 = \frac{0,042}{0,01-1} + 0,1 =$$

$$= \frac{141}{990} \text{ «تحقق بتحويل } \frac{141}{990} \text{ إلى كسر دوري بالقسمة»}$$

مثال تطبيقي:

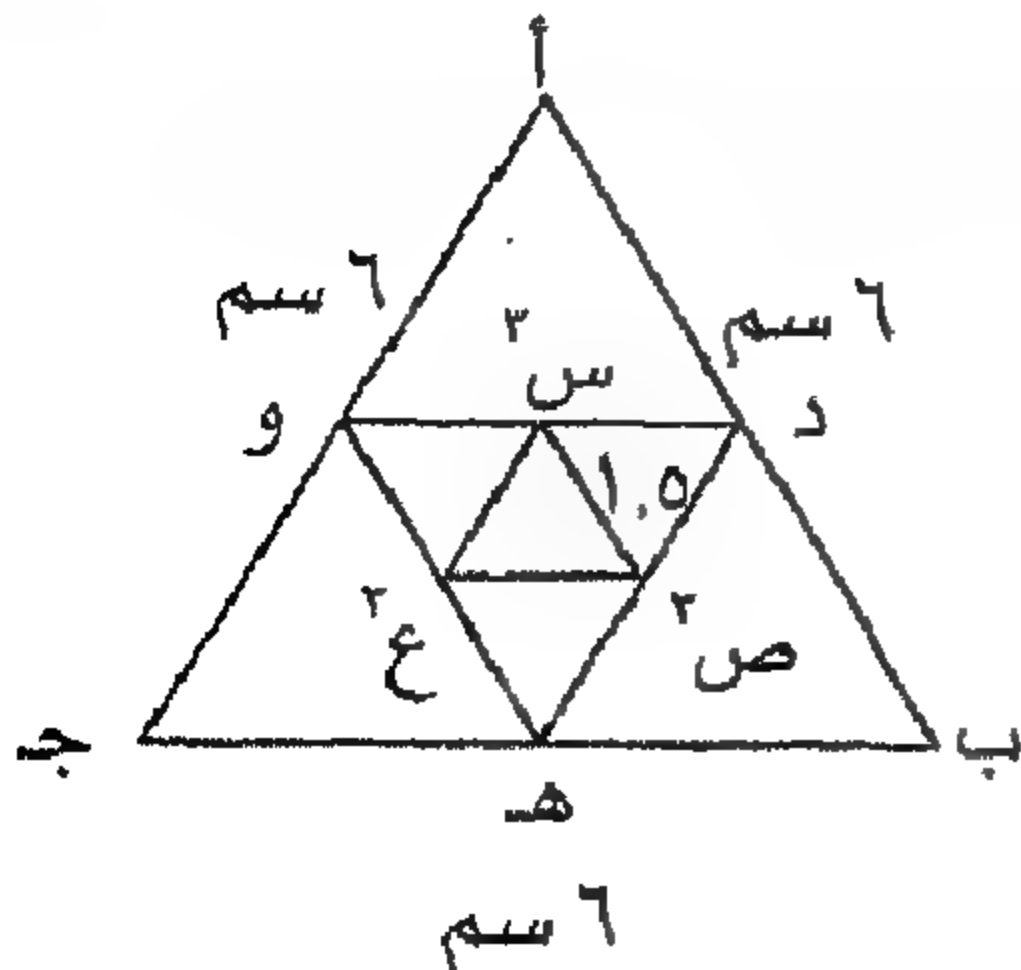
مثلث متساوي الأضلاع محيطه ١٨ سم نصفت أضلاعه ووصل بينها فتكون

مثلث ثم نصفت أضلاع هذا المثلث ووصل بينها فتكون مثلث آخر وهكذا:

أوجد مجموع محيطات المثلثات الناتجة

إلى ما لا نهاية وكذلك مجموع مساحاتها.

الشكل يوضح السؤال:





المثلثات: أ ب ج، د ه و، س ص ع.

$$\text{محيط أ ب ج} = 18$$

$$\text{محيط د ه و} = 9 = (3)^2$$

$$\text{محيط س ص ع} = 4,5 = (1,5)^2$$

$$\text{متسلسلة المحيطات } 18 + 9 + 4,5 + \dots$$

$$\text{هندسية الآن } \frac{1}{2} = r, \quad \frac{1}{2} = \frac{4,5}{9} = \frac{9}{18}$$

$$\text{لا نهائية تقاربية لأن } 1 > \frac{1}{2}$$

$$\text{كون ضلع د ه و} = \frac{1}{2} \text{ ضلع أ ب ج «حسب النظرية»}$$

«القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلثات تساوي نصف

الضلع الثالث».

$$\therefore \text{ج} = \infty = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{18}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{18}{-\frac{1}{2}}$$

$$= (18)(2) = 36 \text{ سم مجموع محيطات المثلثات}$$

أما المساحات:

$$\text{باستخدام القانون: مساحة أ ب ج} = \frac{1}{2} \text{ أ ب ج ج} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) (6)(6) \text{ ج} 60^\circ \text{ (كونه متساوي الأضلاع)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) (6)(6) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$\text{مساحة المثلث د ه و} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4} \sqrt{3}$$

$$\text{مساحة المثلث س ص ع} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{16} \sqrt{3}$$

المتتاليات والمتسلسلات

$$\text{متسلسلة المساحات } \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{\frac{9}{4}} + \sqrt[3]{\frac{9}{16}} + \dots$$

هندسية كون $\frac{1}{4} = \frac{\sqrt[3]{9}}{1} \times \frac{\sqrt[3]{9}}{4} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\frac{4}{\sqrt[3]{9}}}$ لا نهائية

كون $\frac{1}{4} > 1$ وتقاربية

$$\therefore \text{ج} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{r - 1} = \infty$$

$$\sqrt[3]{12} = \frac{4}{3} \times \sqrt[3]{9} = \text{سم}^2$$

(١٥ - ٥) متتاليات ومتسلسلات هامة في الرياضيات

«سنوردها بإيجاز شديد»

(١) المتتالية والمتسلسلة الحسابية الهندسية معاً G. and A. Sequece and Series

«المتتالية الحسابية الهندسية»

المتتالية التالية: ٧، ٧، ٧، ٧، ٧، ٧، ٧

حدها الأول = أ = ٧

وهي متتالية حسابية كون $٧ - ٧ = ٧ - ٧ = \text{صفر} = د$

أي أن أساسها د = صفر

وهي متتالية هندسية كون $\frac{٧}{٧} = \frac{٧}{٧} = ١ = ر$

أي أن أساسها ر = ١

فهي حسابية هندسية معاً.



حدها العام =

$$ح = أ + (١ - ١) د = أ + (١ - ١) د = أ = ٧ كحسابية$$

$$أ = ١ - ١ = ١ - ١ = ١ = أ = ٧ كهندسية$$

$$٧ + ٠٠٠٠ + ٧ + ٧ + ٧$$

متسلسلة حسابية كون أساسها د = صفر

ومتسلسلة هندسية كون أساسها ر = ١

فهي متسلسلة حسابية هندسية.

مجموع ١ منها كحسابية:

$$ج = ١ = \frac{١}{٢} \{ ١ + (١ - ١) + ٢ \} = \{ ١ + (١ - ١) + ٢ \}$$

$$\frac{١}{٢} = \{ ١ + ٢ \} = ١$$

ومجموع ١ منها كهندسية يؤخذ من رموز المجموع.

$$\sum_{١=١}^١ ١ = ١ + ١ + ١ + ١ + ١ = ٥ إلى ١ مرة$$

$$١ = ١$$

مثال: ما مجموع عشرة حدود من المتسلسلة ٧ + ٠٠٠٠ + ٧ + ٧ + ٧

$$أو أوجد \sum_{١=١}^{١٠} ٧ = ٧ + ٠٠٠٠ + ٧ + ٧ + ٧ إلى عشر مرات$$

$$١٠ = (٧) ٧٠ كهندسية$$

وكحسابية:



المتتاليات والمتسلسلات



ج. ١٠ = (٧) ٧٠ كحسابية

تسمى أحياناً المتسلسلة الثانية (أي أن حدودها لا تتغير بالزيادة أو النقصان)

(٢) المتسلسلة التوافقية Harmonic Series

هي المتسلسلة اللانهائية التي كل حد من حدودها يعتبر مقلوباً لحد في متسلسلة حسابية مناظرة لها.

$$\frac{1}{n} = \text{ومثالها المتسلسلة التي حدها العام ح } \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty}$$

وبما أن حدها العام $\frac{1}{n}$ فإن ح $\frac{1}{v} = \frac{1}{v}$ وهكذا

ولا يمكن إيجاد جميع حدودها مطلقاً.

مثال: أكتب المتسلسلة التوافقية المناظرة للمتسلسلة الحسابية

$$0 + 10 + 20 + 30 + 40 + \dots$$

المتسلسلة التوافقية: $\frac{1}{0} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \dots$

حدها العام: بما أن البسط ١ وهو ثابت فإن الحد العام للمقام:

$$ح = 0 + 10 = (0) (1 - 0) + 0 = 1 (1 - 0) + 0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{ح \text{ للمقام}}$$

(٣) متتالية الأعداد المثلثية Triangular Numbers Sequence



المتتاليات والمتسلسلات



إنها متتالية حدودها منتقاه من مجموعة الأعداد الطبيعية ط* بترتيب مُعين بحيث تشكل بتمثيلها على هيئة نقط مثلثات كما يلي:

العدد الأول = ١ • نقطة واحدة

العدد الثاني = ١ + ٢ = ٣ ∴ ثلاث نقط

العدد الثالث = ١ + ٢ + ٣ = ٦ ∴ ∴ ست نقط

العدد الرابع = ١ + ٢ + ٣ + ٤ = ١٠ ∴ ∴ ∴ عشر نقط

وهكذا

هذا ويمكن كتابتها على الصورة : $\frac{١ \times ٢}{٢}, \frac{٢ \times ٣}{٢}, \frac{٣ \times ٤}{٢}, \frac{٤ \times ٥}{٢}$

وهكذا

وكمتتالية فإن حدها العام ح_n = $\frac{n(n+1)}{2}$

للتحقق فإن ح_٤ = $\frac{٤(٤+١)}{2} = \frac{٤(٥)}{2} = ١٠$ كما هو واضح أعلاه

لذلك فمتتالية الأعداد المثلثاتية هي: ١، ٣، ٦، ١٠، ١٥، ٢٠، ... $\frac{n(n+1)}{2}$

(٤) متتالية المربعات Squares Sequence

إنها متتالية حدودها منتقاه من مجموعة الأعداد الطبيعية ط* بترتيب خاص يتمحور حول جمع الأعداد الفردية ومن بداية المجموعة ط* هكذا:

ح_١ = ١ = ١^٢ حيث ١ عدد حقيقي

ح_٢ = ١ + ٣ = ٤ = ٢^٢ حيث ٢ عدد حقيقي

ح_٣ = ١ + ٣ + ٥ = ٩ = ٣^٢ حيث ٣ عدد حقيقي



المتتاليات والمتسلسلات



حيث 4 عدد حقيقي

$$^2(4) = 16 = 1 + 3 + 5 + 7 =$$

حيث 5 عدد حقيقي

$$^2(5) = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$$

وحدها العام $^2n =$ حيث n عدد الحدود، \exists ط*

فالمتتالية هي: 1، 4، 9، ...، n^2

وحدها العاشر =

$$^2(10) = 100 =$$

وهكذا.

(5) المتسلسلات المتناوبة Alternating Series

إنها متسلسلات لا نهائية ذات حدود ثابتة فيها تتناوب الحدود الإشارتين الموجبة والسالبة وعلى التوالي حد موجب ويليهما حد سالب وهكذا. ويُعبر عنها بإحدى الصورتين:

$$\dots + a_n + (-1)^n a_n + \dots = (-1)^n \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\dots + (-1)^n a_n + (-1)^{n+1} a_n + \dots = (-1)^n a_n \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

كـ مثال:

$$\dots + 5 - 5 + 5 - 5 + \dots \text{ بدأت المتسلسلة بالحد السالب}$$

$$\dots + (-1)^n 5 + (-1)^{n+1} 5 + \dots = (-1)^n 5 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

وكذلك

$$\dots - 5 + 5 - 5 + 5 - \dots \text{ بدأت المتسلسلة بالحد الموجب}$$

وبإيجاز شديد يظهر في الحدود العدد $(-1)^n$ أو العدد $(-1)^{n+1}$

لتكسب المتتالية صفة التناوب، \exists ط*





(٦) متسلسلة القوى Power Series

وتسمى المتسلسلة الأسية أيضاً

وهي المتسلسلة اللانهائية وذات الحدود المتغيرة والتي تظهر المتغير x في

كل حدٍ من حدودها كما في الصورة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$



(١٥ - ٦) أمثلة محلولة على المتتاليات والمتسلسلات

مثال ١: صنف المتتاليات والمتسلسلات التالية إلى:

{حسابية، هندسية، حسابية وهندسية، لا حسابية ولا هندسية}

(١) المتتالية ١، ٣، ٥، ...

الجواب: حسابية لأن الفرق بين $ح_٢$ و $ح_١$ يساوي الفرق بين $ح_٣$ و $ح_٢$ هكذا

$$ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ \text{ كون } ٣ - ١ = ٥ - ٣ = ٢ \text{ أساسها.}$$

(٢) المتسلسلة ٢٠ + ١٠ + ٥ + ٠٠٠٠

الجواب: هندسية لأن النسبة بين $ح_٢$ و $ح_١$ يساوي الفرق بين $ح_٣$ و $ح_٢$ هكذا

$$\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢} \text{ كون } \frac{١٠}{٢٠} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢} \text{ أساسها.}$$

(٣) المتسلسلة $\sum_{r=1}^n$

الجواب: بعد فك رمز لمجموع تصبح المتسلسلة

$$١ + ٢ + ٣ + \dots + n$$

لا حسابية ولا هندسية كون $ح_٢ - ح_١ \neq ح_٣ - ح_٢$ الفرق غير ثابت

$$\text{وكون } \frac{ح_٢}{ح_١} \neq \frac{ح_٣}{ح_٢} \text{ النسبة غير ثابتة}$$

(٤) المتتالية التي حدها العام $ح_n = ٧$

أي المتتالية: ٧، ٧، ٧، ...، ٧



حسابية وهندسية الآن:

$$ح_1 - ح_2 = ح_2 - ح_3 \text{ كون } 7 - 7 = 7 - 7 = \text{صفر أساسها}$$

$$\text{ولأن } \frac{ح_2}{ح_1} = \frac{ح_3}{ح_2} \text{ كون } \frac{7}{7} = \frac{7}{7} = 1 \text{ أساسها}$$

فهي حسابية أساسها = صفر

وهندسية أساسها = 1

مثال ٢: أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها

الأول = ٦ وأساسها = ٤

الحل:

نجد ح_١ لها:

$$ح_1 = 1 + 4(1 - 1) = 1 + 6 = 7$$

$$7 = 4 + 6 = 10$$

$$10 = 4 + 6 = 14$$

ثم نجد الحدود لتكوين المتتالية هكذا:

$$ح_1 = 7 = 1 + 6 = 7 \text{ كما هو مُعطى}$$

$$ح_2 = 10 = 2 + 8 = 10$$

$$ح_3 = 14 = 3 + 11 = 14$$

$$ح_4 = 18 = 4 + 14 = 18$$

المتتاليات والمتسلسلات



$$ح. \quad 22 = 2 + 20 = 2 + 0 = 2$$

∴ المتتالية: ٦، ١٠، ١٤، ١٨، ٢٢، ...، (٢ + ٦)

مثال ٣: أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتسلسلة

$$000 + 128 + 256 + 512$$

الحل: حدها الأول = ٥١٢

$$\text{أساسها } r = \frac{128}{256} = \frac{256}{512} = \frac{1}{2}$$

$$\text{بما أن } r < 1, \quad \frac{a(1-r^n)}{1-r} = 0$$

$$\therefore \text{ج. } \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right) 512}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right) 512}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{255}{256}\right) 512}{\frac{1}{2}} =$$

$$1020 = (255)(4) = (2)(255)(2) =$$

مثال ٤: أوجد مجموع المتسلسلة

$$0000 + \frac{1}{125} + \frac{1}{25} + \frac{1}{5} + 1$$

بما أن المتسلسلة هندسية لا نهائية تقاربية

$$\text{وأن أساسها: } r = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \text{ج. } \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$



المتتاليات والمتسلسلات

$$\therefore \text{جـ} = \frac{1}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4}$$

مثال ٥: بين أن لوغاريتمات حدود متتالية هندسية للأساس (١٠) تُكوّن متتالية حسابية:

البيان: ليكن لدينا المتتالية الهندسية أ، أر، أر^٢، ...، أر^٩ أساسها ر وحدها الأول أ.

والآن اللوغاريتمات للأساس (١٠) لحدودها: هي

لأ، لوأر، لوأر^٢، ...، لوأر^٩

وحتى تكون هذه الحدود متتالية حسابية نجد أساسها (٥)

$$\text{لوأر} - \text{لوأر}^9 = \text{لوأر}^2 - \text{لوأر}$$

الجواب كما يلي:

الطرف الأيمن: لوأر - لوأ = لوأ + لور - لوأ (من قوانين اللوغاريتمات)

$$= \text{لور}$$

الطرف الأيسر: لوأر^٢ - لوأر = ٢لور - لور^٢ - لوأ - لور

$$= \text{لور}^2 - \text{لور} = ٢\text{لور} - \text{لور} = \text{لور الطرف الأيمن}$$

∴ الأساس ٥ = لور

وحدها الأول: لوأ + (١ - ٥) لور

وحدها العام: ح^٥ + (١ - ٥) (٥)

فهي حسابية الأساس

المتتاليات والمتسلسلات



$$= \text{لو أ} + \text{لو ر} - ١$$

$$= \text{لو أ} - ١$$

وهو المطلوب بيانه

مثال ٦: إذا كان الحد العاشر من متسلسلة حسابية هو ٤٣ وكانت النسبة بين حديها الثالث والخامس هي ٤ : ٩، أوجد الحد العام.

$$\text{بما أن ح } n = \text{أ} + (n - ١) \cdot \text{ر}$$

$$\text{فإن ح } ١٠ = \text{أ} + (١٠ - ١) \cdot \text{ر} = ٩\text{ر} + \text{أ} = ٤٣ \quad (١)$$

$$\text{وبالضرب التبادلي} \quad (٢) \quad \frac{٤}{٩} = \frac{٩\text{ر} + \text{أ}}{٩\text{ر} + \text{أ}} = \frac{٩(١ - ٢) + \text{أ}}{٩(١ - ٥) + \text{أ}} = \frac{٢}{٥}$$

$$٩\text{ر} + \text{أ} = ١٨ + ٤\text{أ}$$

لحذف ٥

$$\text{والحل بالحذف} \quad \left(\begin{array}{l} (٢) \quad ٩\text{ر} + \text{أ} = ١٨ + ٤\text{أ} \\ (١) \quad ٩\text{ر} + \text{أ} = ٤٣ \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} ٩ \\ - ٢ \end{array}$$

$$\text{والحل بالحذف} \quad \begin{array}{l} (٢) \quad ٩\text{ر} + \text{أ} = ١٨ + ٤\text{أ} \\ (١) \quad ٨٦ - = ٩\text{ر} - ٣\text{أ} \end{array}$$

$$٨٦ - = ٤٣\text{أ}$$

$$\text{أ} = \frac{٨٦ -}{٤٣} = ٢ \quad \text{حدها الأول}$$





$$\text{لكن } ٤٣ = ٥٩ + ١ \quad (١)$$

$$\therefore ٤٣ = ٥٩ + ٢ -$$

$$٤٥ = ٥٩$$

$$٥ = ٥ \text{ أساسها}$$

$$\therefore \text{ح } ٥ = (٢ -) + (١ - ٥) = ٥ - ٥ + ٢ - = ٥ -$$

$$\therefore \text{ح } ٥ = ٧ - ٥ -$$

مثال ٧: ثلاثة أعداد حقيقية تكون متتالية هندسية مجموعها ١١٢، فإذا جمعنا إلى العدد الأول ٨ والعدد الثاني ٨ وطرحنا من العدد الثالث ٨، تصبح هذه الأعداد بعد التغيير متتالية حسابية، فما هي هذه الأعداد ؟

نفرض أن العدد الأول = أ

يكون العدد الثاني = أ ر

ويكون العدد الثاني = أ ر^٢

كونها متتالية هندسية

$$\therefore ١١٢ = أ + أ ر + أ ر^٢ \quad (١)$$

وبعد الجمع، العدد الأول يصبح أ + ٨

والعدد الثاني يصبح أ ر + ٨

وبعد الطرح: العدد الثالث يصبح: أ ر^٢ - ٨

\therefore أ + ٨، أ ر + ٨، أ ر^٢ - ٨ متتالية حسابية

$$\text{أساسها: } (أ + ٨) - (أ ر + ٨) = (أ ر + ٨) - (أ ر^٢ - ٨)$$





$$\therefore 8 - r - 8 - r^2 = 8 - 1 - 8 + r$$

$$\therefore 16 = 1 + r - r^2$$

$$\textcircled{2} \quad 16 = 1 + 2r - r^2$$

وبحل المعادلتين ١، ٢ بالحذف بعد التحليل هكذا:

$$112 = (1 - r + r^2)$$

$$\textcircled{1} \quad \leftarrow \frac{112}{(1 - r + r^2)} = \text{ومنها } 1$$

$$\text{وكذلك } 16 = (1 - 2r + r^2)$$

$$\textcircled{2} \quad \leftarrow \frac{16}{(1 - 2r + r^2)} = \text{ومنها } 2$$

\therefore من $\textcircled{1}$ ، $\textcircled{2}$ ينتج أن

$$\text{وبالضرب التبادلي} \quad \frac{16}{(1 - 2r + r^2)} = \frac{112}{(1 - r + r^2)}$$

$$16(1 - r + r^2) = 112(1 - 2r + r^2)$$

$$\therefore 16 - 16r + 16r^2 = 112 - 224r + 112r^2$$

$$\therefore 16r^2 - 16r + 16 = 112r^2 - 224r + 112$$

$$\frac{16r^2 - 16r + 16}{3} = 112r^2 - 224r + 112$$

$$2r^2 - 2r + 2 = 112r^2 - 224r + 112$$

$$(2r^2 - 2r + 2) = (112r^2 - 224r + 112)$$

المتتاليات والمتسلسلات



$$\therefore r = \frac{1}{2}, \quad 2,$$

$$\text{ومنها} = \frac{112}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{112}{\frac{7}{4}} = \frac{112}{7} \times 4 = 64 \text{ العدد الأول}$$

$$\text{العدد الثاني} = Ar = \frac{1}{2} \times 64 = 32$$

$$\text{العدد الثالث} = Ar^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 16$$

فالأعداد 64، 32، 16

وعندما $r = 2$

$$\therefore A = \frac{116}{1 + 2 + 4} = \frac{116}{7}$$

$$\text{العدد الثاني} = Ar = 2 \times 16 = 32$$

$$\text{العدد الثالث} = Ar^2 = 2 \times 2 \times 16 = 64$$

فالأعداد 16، 32، 64

\therefore الأعداد الثلاثة هي 16، 32، 64 أو العكس 64، 32، 16

مثال ٨: عددان حقيقيان موجبان وسطهما الحسابي = ٥ ووسطهما

الهندسي = ٣، فما العددان ؟

العددان أ، ب

$$\text{بالتربيع} \quad 3 = \sqrt{ab} \quad \text{بالتربيع} \quad 9 = ab \quad \text{بالتربيع} \quad 5 = \frac{a+b}{2} \quad \text{بالتربيع} \quad 10 = a+b \quad (1)$$

$$\text{وكذلك} \quad 3 = \sqrt{ab} \quad \text{بالتربيع} \quad 9 = ab \quad (2)$$

وبحل المعادلتين بالتعويض هكذا.



المتتاليات والمتسلسلات



$$\text{بما أن } a + b = 10 \rightarrow a = 10 - b$$

نعوض في المعادلة التالية:

$$9 = (b)(10 - b)$$

$$\therefore 10b - b^2 = 9$$

$$- (1 - b)(10 + b - 9) = 0 \quad (\text{صفر})$$

$$b^2 - 10b + 9 = \text{صفر}$$

$$(b - 1)(b - 9) = \text{صفر}$$

$$\therefore b = 1, 9 \text{ العدد الثاني}$$

$$\text{لكن } a = 10 - b$$

$$\therefore a = 10 - 1 = 9$$

$$\text{وكذلك } 10 - 9 = 1$$

$$\text{فالعددان } 1, 9$$

مثال ٩: أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات والم. : المسلات

التالية:

$$\left. \begin{array}{l} \{ 2^n, \text{ عدد فردي} \} \\ \{ 3^n, \text{ عدد زوجي} \} \end{array} \right\} = \text{ح. المتتالية التي حدها العام: ح.}$$

الجواب:

كون «١» عدد فردي

$$2 = 2^1 = 2$$

كون «٢» عدد زوجي

$$9 = 3^2 = 9$$



كون «٣» عدد فردي

$$ح_٢ = ٢^٢ = ٨$$

كون «٤» عدد زوجي

$$ح_٤ = ٣^٤ = ٨١$$

كون «٥» عدد فردي

$$ح_٥ = ٢^٥ = ٣٢$$

∴ الحدود الخمسة الأولى من المتتالية هي: ٢، ٩، ٨، ٨١، ٣٢، ...

$$(٢) \text{ المتسلسلة } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - n}{1 + n}$$

$$ح_١ = \frac{1 - 1}{3 + 1} = \frac{\text{صفر}}{٤} = \text{صفر}$$

$$ح_٢ = \frac{1 - 2}{3 + 2} = \frac{1}{٥}$$

$$ح_٣ = \frac{1 - 3}{3 + 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{٣}$$

$$ح_٤ = \frac{1 - 4}{3 + 4} = \frac{3}{٧}$$

$$ح_٥ = \frac{1 - 5}{3 + 5} = \frac{4}{٨} = \frac{1}{٢}$$

∴ الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة هي:

$$\text{صفر} + \frac{1}{٥} + \frac{1}{٣} + \frac{3}{٧} + \frac{1}{٢} + \dots$$

$$(٢) \text{ المتسلسلة } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{1-n}$$

$$ح_١ = \left(\frac{1}{1} \right)^{1-1} = 1 = 1$$

$$ح_٢ = \left(\frac{1}{2} \right)^{1-2} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} = ٢ = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

المتتاليات والمتسلسلات



$$\frac{1}{9} = {}^2\left(\frac{1}{3}\right) = {}^{1-2}\left(\frac{1}{3}\right) = {}_3\text{ح}$$

$$\frac{1}{64} = {}^3\left(\frac{1}{4}\right) = {}^{1-3}\left(\frac{1}{4}\right) = {}_4\text{ح}$$

$$\frac{1}{625} = {}^4\left(\frac{1}{5}\right) = {}^{1-4}\left(\frac{1}{5}\right) = {}_5\text{ح}$$

∴ الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة هي:

$$\dots + \frac{1}{625} + \frac{1}{64} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + 1$$

مثال ١٠: أكتب الكسر العشري الدوري $0,2\bar{6}$ بصورة عدد نسبي

(كسر عادي)

$$\text{بما أن } 0,2\bar{6} = 0,26666$$

$$\therefore 0,2\bar{6} = 0,2 + (0,0006 + 0,006 + 0,06 + 0,6 + \dots)$$

$$= 0,2 + (\text{مجموع المتسلسلة } 0,06 + 0,006 + 0,0006 + \dots)$$

وبما أن المتسلسلة هندسية لا نهائية تقاربية أساسها ر

$$0,1 = \frac{1}{10} = \frac{0,0006}{0,006} = \frac{0,006}{0,06} =$$

$$\therefore 0,2\bar{6} = 0,2 + \frac{1}{r-1}, \quad r \neq 1$$

$$= 0,2 + \frac{0,06}{0,1-1} =$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{6}{90} = \frac{24}{90} = \frac{6+18}{90} = \frac{6}{90} + \frac{2}{10} =$$

$$\therefore 0,2\bar{6} = \frac{4}{10} = \text{كعدد نسبي أو ككسر عادي.}$$

مثال ١١: أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية التي حدها العام

$$\text{ومثلها بيانياً بصورة جزئية.} \quad \text{ح} = {}^2\text{ح} + {}^2\text{ح}$$



المتتاليات والمتسلسلات



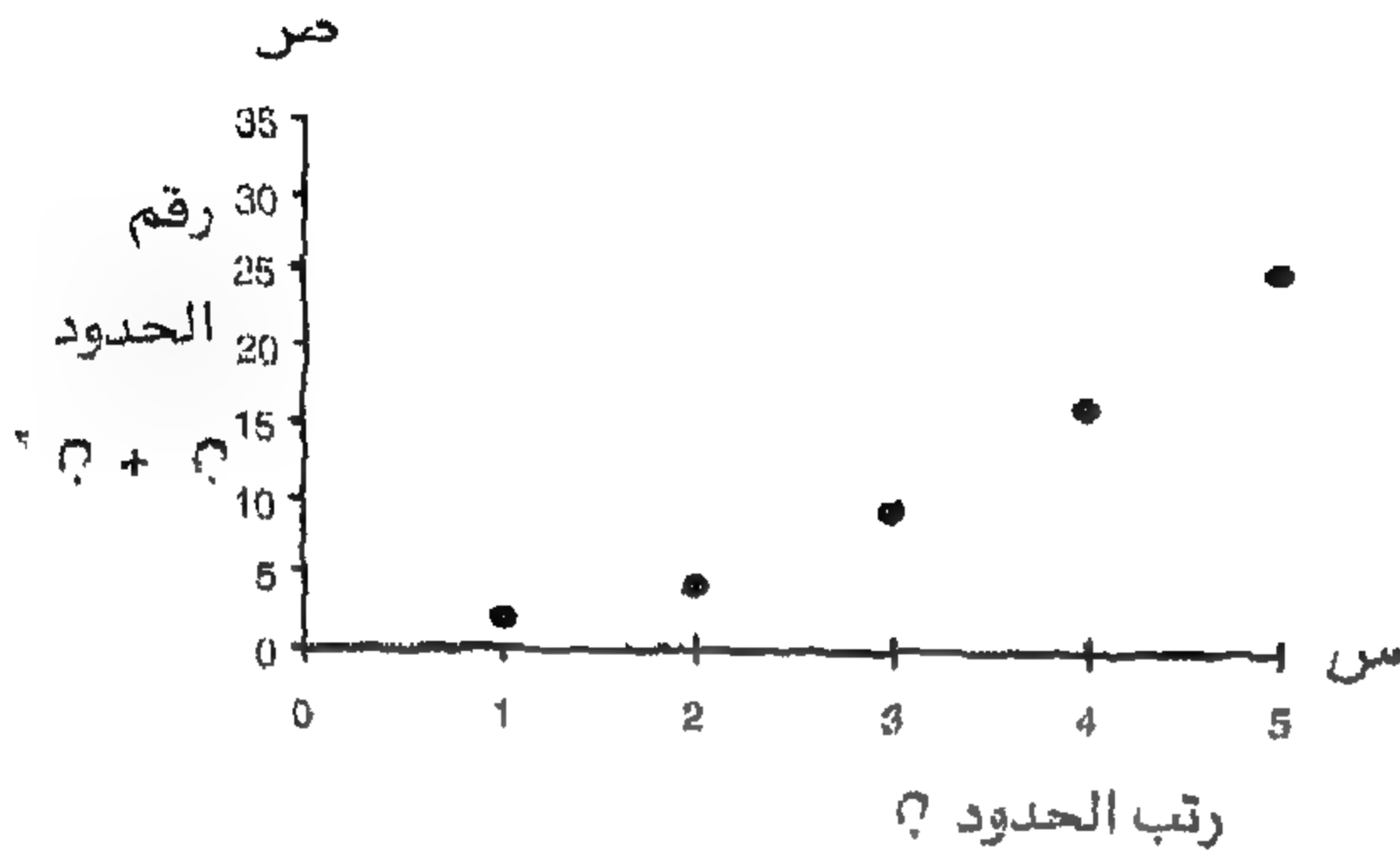
$$2 = 1 + 1 = 1 + {}^2(1) = {}_1\text{ح}$$

$$6 = 2 + 4 = 2 + {}^2(2) = {}_2\text{ح}$$

$$12 = 3 + 9 = 3 + {}^2(3) = {}_3\text{ح}$$

$$20 = 4 + 16 = 4 + {}^2(4) = {}_4\text{ح}$$

$$30 = 5 + 25 = 5 + {}^2(5) = {}_5\text{ح}$$



أما التمثيل البياني لهذه الحدود هكذا

مثال ١٢: أدخل ٥ أوساط حسابية بين العددين ٢٩ ، ٥

بعد إدخال الأوساط الحسابية يصبح العدد ٢٩ هو الأول

$$\textcircled{1} \quad \leftarrow {}_1\text{ح} = 29 = \text{أ}$$

والعدد ٥ هو السابع

$$\textcircled{2} \quad \leftarrow {}_7\text{ح} = 5 = \text{ب}$$

من $\textcircled{1}$ ، $\textcircled{2}$

$$\therefore 5 = 29 + 5 \times 6$$

$$29 - 29 =$$

$$- = 5 \times 6$$

$$- = 5$$

والآن أصبحت الأوساط الحسابية مع العددين ٢٩ ، ٥ سبعة حدود من متتالية



المتتاليات والمتسلسلات



حسابية هي:

٢٩ ، الأوساط الحسابية الخمسة ، ٥

$$\text{الوسط الأول} = \text{الحد الثاني} = ح_٢ = ٢٩ + (-٤) = ٢٥$$

$$\text{الوسط الثاني} = \text{الحد الثالث} = ح_٣ = ٢٥ + (-٤) = ٢١$$

$$\text{الوسط الثالث} = \text{الحد الرابع} = ح_٤ = ٢١ + (-٤) = ١٧$$

$$\text{الوسط الرابع} = \text{الحد الخامس} = ح_٥ = ١٧ + (-٤) = ١٣$$

$$\text{الوسط الخامس} = \text{الحد السادس} = ح_٦ = ١٣ + (-٤) = ٩$$

فالأوساط الحسابية هي

٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ٢٥

وتصبح المتتالية الحسابية:

٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٢٩

مثال ١٣: أوجد مجموع

(١) الأعداد الخمسين الأولى الفردية من مجموعة الأعداد الطبيعية.

(٢) الأعداد الخمسين الأولى الزوجية من مجموعة الأعداد الطبيعية.

استنتج مجموعة المائة عدد الأول من مجموعة الأعداد الطبيعية.

الحل: أي المطلوب الأول:

ج. من المتسلسلة $١ + ٣ + ٥ + ٧ + \dots$ إلى خمسين حداً



المتتاليات والمتسلسلات



المتسلسلة $1 + 3 + 5 + \dots$ حسابية أساسها $2 = 3 - 1 = 5 - 3 = \dots$

$$\text{بما أن ج.ه.} = \frac{n}{2} \{ 2 + (n-1) \cdot 2 \}$$

$$\text{فإن ج.ه.} = \frac{50}{2} \{ 2 + (50-1) \cdot 2 \}$$

$$= \frac{50}{2} \{ 2 + 98 \} = 2500$$

$$2500 = \{ 100 \} \cdot 25 =$$

والمطلوب الثاني:

ج.ه. من المتسلسلة $2 + 4 + 6 + \dots$ إلى خمسين حداً

المتسلسلة $2 + 4 + 6 + \dots$ حسابية أساسها $2 = 4 - 2 = 6 - 4 = \dots$

$$\therefore \text{ج.ه.} = \frac{50}{2} \{ 2 + (50-1) \cdot 2 \}$$

$$= \frac{50}{2} \{ 2 + 98 \} = 2500$$

\therefore مجموع المائة عدد الأولى من مجموعة الأعداد الحقيقية

$$= \{ 1, 2, 3, 4, \dots \text{ إلى مائة حداً} \}$$

أي إيجاد ج.ه. للمتسلسلة $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ إلى مائة حد

المتسلسلة $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ إلى مائة حد حسابية أساسها $1 = 2 - 1 = 3 - 2 = \dots$

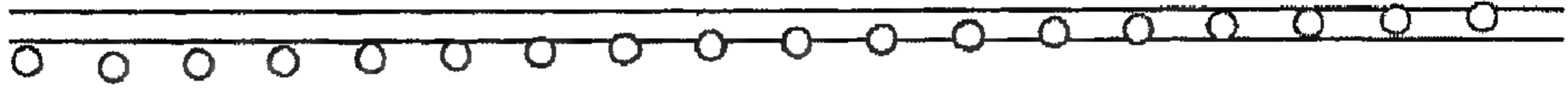
$$\text{ج.ه.} = \frac{100}{2} \{ 1 + (100-1) \cdot 1 \}$$

$$= \frac{100}{2} \{ 1 + 99 \} = 5050$$

وهذا يطابق تماماً ج.ه. الفردية + ج.ه. الزوجية

$$5050 = 2500 + 2500 =$$





مثال ١٤: ما عدد حدود المتتالية ١، - ٣، ٩، - ٢٧، ٨١ المنتهية ؟

أولاً يجب معرفة نوعها أحسابية هي أم هندسية ؟

بما أن - ٣ - ١ ≠ ٩ - (- ٣) فهي غير حسابية

وبما أن $\frac{-3}{1} = \frac{9}{-3} = \frac{-27}{9}$ فهي هندسية أساسها $r = -3$

$$u_n = u_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow (-3)^{n-1} = 81$$

والحد العام هو الحد الأخير في المتتالية

$$\therefore (-3)^{n-1} = 81 \text{ أصبحت معادلة}$$

نحلل ٨١ إلى عواملها الأولية - ٣ فقط

$$\therefore (-3)^{n-1} = (-3)^4$$

$$\therefore n-1 = 4$$

$$n = 5$$

فعدد حدودها ٥ فقط

مثال ١٥: خزان سعته ٢٧٠٠ لتر مملؤ بالماء تماماً، إذا أُفرغ منه كل يوم

$\frac{1}{3}$ الكمية الموجودة فيه فما كمية الماء الباقية فيه بعد نهاية اليوم الخامس.

في اليوم الأول ينقص $\frac{1}{3}$ فيبقى به $\frac{2}{3}$ سعته من الماء

وفي اليوم الثاني يبقى فيه $\frac{2}{3}$ الكمية الباقية من اليوم الأول أو $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ سعته من الماء}$$

وهكذا حتى نهاية نهاية اليوم الخامس: $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \text{الكمية}$



$$= \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times 2700 \text{ لترات}$$

$$= 355,5 \text{ لترات} = \frac{2700}{9} = 2700 \times \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} =$$

$$\sqrt[7]{\text{ع}} = \sqrt[5]{\text{ص}} = \sqrt[3]{\text{س}} \text{ إذا كان}$$

بين أن الأعداد س، ص، ع متتالية هندسية يجب أن يكون

$$\frac{\text{ع}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{ أساسها المتتالية الهندسية}$$

أي أن $\text{ص}^2 = \text{س} \times \text{ع}$ هذا المطلوب بيانه

$$\text{نجد } \sqrt[7]{\text{ع}} = \sqrt[3]{\text{س}} \text{ بدلالة العدد ص هكذا}$$

$$\text{بما أن } (\sqrt[3]{\text{س}} = \sqrt[7]{\text{ع}}) \leftarrow (\text{س}^{\frac{1}{3}} = \text{ع}^{\frac{1}{7}}) \text{ تحويل الجذور إلى}$$

$$\text{أسس نسبية ومنه } \text{ص}^{\frac{2}{5}} = \text{ع}^{\frac{2}{7}} \quad (1)$$

$$\text{بما أن } (\sqrt[7]{\text{ع}} = \sqrt[5]{\text{ص}}) \leftarrow (\text{ع}^{\frac{1}{7}} = \text{ص}^{\frac{1}{5}}) \text{ تحويل الجذور إلى}$$

$$\text{أسس نسبية ومنه } \text{ع}^{\frac{5}{7}} = \text{ص}^{\frac{5}{5}} \quad (2)$$

$$\therefore \text{س} \times \text{ع} = \text{ص}^{\frac{2}{5}} \times \text{ص}^{\frac{5}{7}} = \text{ص}^{\frac{10}{7}} = \text{ص}^{\frac{10}{5}} = \text{ص}^2$$

$$\therefore \text{س} \times \text{ع} = \text{ص}^2$$

$$\therefore \frac{\text{ع}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

ومنها س، ص، ع تشكل متتالية هندسية

للتحقق من صحة الحل نأخذ المثال:

$$\text{بما أن } \sqrt[3]{8} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[7]{128} \quad (2) \text{ لجميع الجذور}$$

فإن الأعداد ٨، ٣٢، ١٢٨ تشكل متتالية هندسية



المتتاليات والمتسلسلات



$$\text{لأن } \frac{128}{32} = \frac{22}{8} = 4 \text{ أساسها } r$$

$$\text{صفر} = \frac{10r^2 - 25r + 10}{5}$$

$$2r^2 - 5r + 2 = \text{صفر}$$

$$(2r - 1)(r - 2) = \text{صفر}$$

$$r = \frac{1}{2}, 2$$

$$\text{ومنه } 20 = \frac{10}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}$$

$$\text{أو } 5 = \frac{10}{2} = \frac{1}{r}$$

$$\text{فالأعداد هي: } 20, \frac{1}{2} \times 20, \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 20$$

$$\text{أي } 20, 10, 5$$

$$\text{أو } 20, 10, 5$$

مثال ١٨: أي من المتتاليات التالية حسابية ؟

$$(1) 1, 4, 9, 16, \dots$$

$$\text{غير حسابية لأن } 1 - 4 \neq 4 - 9$$

$$(2) 2, 2, 2, 2, \dots$$

$$\text{ليست حسابية لأن } 2 - 2 \neq 2 - (-2)$$

$$(3) 32, \text{ صفر}, -3, -6, \dots$$

$$\text{حسابية لأن صفر} - 32 = -3 - \text{صفر} = -6 - (-3) = -3 \text{ أساسها.}$$





مثال ١٩: إذا كان مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

$$1 + a + a^2 + \dots \text{ هو } s$$

وكان مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

$$1 + b + b^2 + \dots \text{ هو } v$$

أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

$$1 + a + a^2 + b + b^2 + \dots \text{ بدلالة } s, v$$

الحل:

$$\text{من المتسلسلة الأولى: } s = \frac{1}{1-a} \quad (\text{مجموعها})$$

$$\text{من المتسلسلة الثانية: } v = \frac{1}{1-b} \quad (=)$$

$$\therefore s = \frac{1}{1-a} \quad \text{بالضرب التبادلي}$$

$$s - as = 1$$

$$\therefore s - 1 = as$$

$$\text{ومنها } a = \frac{s-1}{s}$$

$$\text{وكذلك } v = \frac{1}{1-b} \quad \text{بالضرب التبادلي}$$

$$v - bv = 1$$

$$\therefore v - 1 = bv$$

$$\text{ومنها } b = \frac{v-1}{v}$$

والآن المتسلسلة الهندسية اللانهائية

المتتاليات والمتسلسلات



$$1 + أب + أ^2ب^2 + \dots + ٠٠٠ أساسها = أب$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1-ص}{ص}\right)\left(\frac{1-س}{س}\right) - 1} = \frac{1}{أب - 1} = \infty$$

$$\frac{1}{\frac{س ص - (س - ١)(ص - ١)}{س ص}} = \frac{1}{\frac{(س - ١)(ص - ١)}{س ص} - \frac{1}{1}} =$$

$$\frac{س ص}{س ص - (س ص - س - ص + ١)} = \frac{1}{\frac{س ص}{س ص - \{(س - ١)(ص - ١)\}}} =$$

$$\frac{س ص}{س + ص - ١} = \frac{س ص}{س ص + س + ص - ١} =$$

وبدلالة س، ص

مثال ٢٠: أيهما أفضل لشخص أن يودع مبلغ ١٠٠٠ دينار بفائدة مركبة معدلها السنوي ٤٪ ولمدة ٣ سنوات وتضاف الفائدة إلى الأصل كل ٦ شهور أم أن يودع المبلغ نفسه في نفس البنك بفائدة مركبة معدلها السنوي ٤,٢٥٪ ولنفس المدة ولكن تضاف الفوائد إلى الأصل كل سنة ؟

$$\text{جـ مركبة} = م \left(١ + \frac{ع}{ك} \right)^{ك \times م} \text{ حيث ك = ٢ مرة بالسنة}$$

$$\therefore \text{جـ مركبة} = ١٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٤}{٢} \right)^{٢ \times ٣}$$

$$= ١٠٠٠ (١,٠٢)^6$$

$$= ١٠٠٠ (١,٠٢)^2 (١,٠٢)^2 (١,٠٢)^2$$

$$= ١٠٠٠ (١,٠٦١٢٠٨) (١,٠٦١٢٠٨) (١,٠٦١٢٠٨)$$

$$= ١٠٠٠ (١,٠٦) (١,٠٦) (١,٠٦) \text{ بعد تقريب الجواب لأربعة منازل عشرية}$$





$$= 1000 (1,1236) = 1123,6 \text{ دينار تقريباً}$$

وعندما تضاف الفوائد كل سنة تستخدم القانون

$$\text{ج مركبة} = م(1 + ع)^n = 1000 (1,0425)^2$$

$$= 1000 (1,0425) (1,0425) (1,0425) =$$

$$= 1000 (1,04) (1,04) (1,04) \text{ لأقرب 6 منازل عشرية}$$

$$= 1000 (1,04)^2$$

$$= 1000 (1,481264) = 1481,2 \text{ دينار تقريباً}$$

والملاحظ أن الإيداع بالشرط الثاني أفضل كون جملته تصبح أكبر

$$\text{لأن } 1123,63 < 1481,2$$



(١٥ - ٦) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) أكتب الحد العام لكل من المتسلسلات التالية مع أنها ليست حسابية ولا هندسية.

$$\{ 1, 4, 9, 16, \dots \} \quad \text{«١» } 1 + 4 + 9 + 16 + \dots$$

$$\{ 1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{3}, 3, \sqrt{4}, \dots \} \quad \text{«٢» } 1 + \sqrt{2} + 2 + \sqrt{3} + 3 + \sqrt{4} + \dots$$

$$\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots \} \quad \text{«٣» } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

(٢) أوجد الحد العشرين للمتتالية

$$\{ \text{صفر} \} \quad \dots, 38, 36, 34, \dots$$

(٣) أوجد مجموع أول ١٧ حد من المتسلسلة

$$\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \} \quad \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

(٤) متسلسلة حسابية محدودة، حدها الأول ٥ وحدها الأخير ٤٥ ومجموع حدودها

$$\{ 1, 2, 3, \dots, 45 \} \quad 400, \text{ ما أساسها وعدد حدودها } 5$$

(٥) كون المتتالية الحسابية التي حدها السابع - ٣ وحدها الحادي والخمسين

$$\{ \dots, 29, 37, 45 \} \quad - 355$$

(٦) أدخل ٢٠ وسطاً حسابياً بين العددين ٤، ٦٧

$$\{ 7, 10, 13, \dots, 61, 64 \}$$





(٧) كم حداً من بداية المتسلسلة يجب أخذه ليكون مجموع هذه الحدود ٧٢ ؟

$$\{٩، ٤\}$$

(٨) ما الحد الثامن للمتتالية - $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، - $\frac{3}{4}$ ، ... ، $\{ \frac{729}{128} \}$

إرشاد: هندسية

(٩) أدخل ٤ أوساط هندسية بين العددين ٥ ، ١٦٠ ، $\{١٠، ٢٠، ٤٠، ٨٠\}$

(١٠) أوجد مجموع أول ٩ حدود من المتسلسلة ٣٦ ، ٥٤ ، ٨١

$$\{ \frac{55}{81} 236 \text{ هندسية} \}$$

(١١) حول الكسر الدوري $0.4\overline{23}$ إلى الصورة النسبية $\{ \frac{419}{990} \}$

(١٢) كوّن المتسلسلة الهندسية اللانهائية (التقاربية) التي مجموع حديها الأول والثاني

$$= \frac{1}{3} \text{ ومجموعها إلى ما لا نهاية } = \frac{25}{6}$$

(١٣) إذا علمت أن المتتالية ٢ ، ٤ ، ٨ ، ... ، 2^n هي متتالية هندسية فما نوع المتتالية

التالية $2(2)$ ، $2(4)$ ، $2(8)$ ، ... ، $2(2^n)$ {هندسية}

(١٤) أكتب المتسلسلات التالية باستخدام رمز المجموع \sum

$$\{ \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \} \quad \text{«١» } 2 + 4 + 6 + \dots$$

$$\{ \sum_{j=1}^n 2^j \} \quad \text{«٢» } 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots$$



المتتاليات والمتسلسلات



(١٥) أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r+1)(r-2)(1-r)}{6}$

(١٦) متسلسلة حسابية محدودة حدها الأول = ٧ وحدها الأخير = ٥٥ ومجموع حدودها جميعاً = ٤٠٣ فما عدد حدودها ؟
 { ١٣ حداً }

(١٧) أكتب الحد العام لكل من المتتاليات:

«١» لو٢، لو٤، لو١٦، ...
 { ٢ - ١ لو٢ }

إرشاد: هندسية وأساسها ٢

«٢» $\frac{1}{s}$ ، $\frac{s+2}{s^2}$ ، $\frac{s^2+2}{s^2}$ ، ... ، $s \neq \text{صفر}$

{ $\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}$ }

«٣» ١، ٨، ٢٧، ...
 { ٣ - ١ }

إرشاد: لا حسابية ولا هندسية

(١٨) أدخل ثلاثة أوساط هندسية بين العددين ٤، ٦٤
 { ٨، ١٦، ٣٢ }

(١٩) متتالية حسابية مجموع حديها الأول والثالث = ١٢ فما مقدار حدها الثاني { ٦ }

(٢٠) متسلسلة هندسية حدها الأول ٣٢ وحدها السادس ٢٤٣ أوجد حدها العام

{ $32 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}$ }

(٢١) متسلسلة حسابية منتهية حدها الأول - ٣ وحدها الأخير ٢٥ ومجموعها ٥٦١ ما

أساسها وعدد حدودها ؟
 { $\frac{14}{25}$ ، ٥١ }



(٢٢) أكتب العدد الدوري $0.\overline{23}$ بصورة عدد نسبي على الشكل $\frac{أ}{ب}$ $\left\{ \frac{23}{99} \right\}$

(٢٣) ما قيمة كل من أ، ر إذا كان

$$\frac{2}{3} = 0.00 + 0.01r + 0.0001r^2 + \dots$$

$$\frac{3}{4} = 0.00 - 0.01r + 0.0001r^2 + \dots$$

حيث $|r| > 1$ $\left\{ \frac{1}{17}, -\frac{12}{17} \right\}$

(٢٤) أكتب المتسلسلة $1 + 2 + 5 + 8 + 000 + 23$ باستخدام رمز المجموع \sum

إرشاد: أوجد حدها العام أولاً $\left\{ \sum_{n=0}^9 (3 - n) \right\}$

(٢٥) إذا كانت $0.00 + 0.01r + 0.0001r^2 + \dots$ متتالية هندسية لكل أ، ر أعداد حقيقية

بين أن لو أ، لو أ ر، لو أ ر^٢، ... متتالية حسابية وأوجد أساسها

$\{ \text{لو أ ر} \}$

(٢٦) أوجد عددين طبيعيين الفرق بينهما $= 32$ ويزيد وسطها الحسابي عن وسطها

الهندسي بمقدار ٢ $\{ 49, 81 \}$

(٢٧) أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتاليات التي حدها العام:

$$ح١ = \frac{1 + n - n^2}{5 + n^3}$$

$$ح٢ = \frac{n(1 - n)}{(1 + n)(2 + n)(3 + n)}$$

المتتاليات والمتسلسلات



$$\frac{1}{n} \left(\binom{n}{5} + \binom{n}{2} \right) = {}_n H^{(3)}$$

$$\sqrt{(2+n)(1+n)} - n = {}_n H^{(4)}$$

(٢٨) أكتب العدد ٠,١٢١٢١٢٠٠٠ على صورة عدد نسبي $\left\{ \frac{12}{99} \right\}$

(٢٩) أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتسلسلات

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \langle 1 \rangle$$

$$\left(\frac{1}{n} - 3 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \langle 2 \rangle$$

(٣٠) كم عدد حدود المتسلسلة $22 + \dots + 1 + 2 - 5 - \dots$ $\{ 10 \}$

(٣١) أوجد مجموع جميع حدود المتسلسلة $(1 + n^3) \sum_{n=1}^{10}$ $\{ 175 \}$

(٣٢) ما النسبة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي للعددين ٦٤، ١٩٦ ؟

$\{ 56:65 \}$

(٣٣) كم عدد حدود المتتالية ١، - ٣، ٩، ...، ٨١ ؟ $\{ 5 \}$

(٣٤) أوجد مجموع المتسلسلة $100 - 20 + 4 - \dots$ $\left\{ \frac{500}{7} \right\}$

(٣٥) عمل شخص لدى شركة مقابل راتب سنوي مقداره ٤٢٠٠ دينار وزيادة سنوية مقدارها ٣٠٠ دينار.





احسب مجموع ما تقاضاه هذا الشخص من الشركة خلال ٥ سنوات ؟

{ ٢٤٠٠٠ }

(٣٦) إذا كان دخل سنان السنوي ١٠٠٠ دينار وبتزايد بمقدار ١٥٠ دينار سنوياً وكان يدخر منه ما نسبته ٨٪.

احسب مجموع مدخراته في نهاية ٢٠ سنة { ٣٨٨٠ دينار }

إرشاد: المدخرات تمثل مجموع متسلسلة حسابية

(٣٧) خمسة أعداد حقيقية تشكل متتالية حسابية مجموعها يساوي - ٢٠ ومجموع مربعاتها يساوي ١٧٠ فما هذه الأعداد ؟

{ - ١٠ ، - ٧ ، - ٤ ، - ١ ، ٢ أو العكس }

(٣٨) أيهما أكبر مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية أم مجموع الأعداد الطبيعية الفردية المحددة بالفترة (١٠٠ ، ٢٠٠) ؟

(٣٩) ما ترتيب الحد الذي قيمته $\frac{1}{486}$ في المتتالية الهندسية

{السادس} $\frac{1}{2} ، \frac{1}{6} ، \frac{1}{18} ، \dots$

(٤٠) إذا كان الوسط الحسابي لعددتين حقيقيين هو ٥ وكان الوسط الهندسي لهما هو ٤ فما العددان ؟ { ٢ ، ٨ أو العكس }

(٤١) ثلاثة أعداد حقيقية تشكل متتالية هندسية مجموعها يساوي ١٤ ، وإذا أنقص العدد الثالث بمقدار ٢ تحولت المتتالية إلى حسابية، فما هي هذه الأعداد ؟

{ ٢ ، ٤ ، ٨ أو العكس }





(٤٢) إذا كانت النسبة بين مجموع الحدود العشرة الأولى من متسلسلة حسابية ومجموع الحدود الخمسة الأولى منها كنسبة ١٣ : ٤ فما العلاقة بين أساس المتتالية (s) وحدها الأول (أ)

$$\left\{ \frac{1}{3} = s \right\}$$

(٤٣) يُراد حفر بئر ارتوازي عمقه ١٥٠ متراً، فإذا علمت أن تكلفة حفر المتر الأول = ٦٠ دينار وتكلفة حفر المتر الثاني = ٧٠ دينار وتكلفة حفر المتر الثالث = ٨٠ دينار وهكذا. ما تكلفة حفر البئر كاملاً ؟

(٤٤) عبّر عن العدد ٠,٢٣٤ بالصورة $\frac{أ}{ب}$ كعدد نسبي

$$\left\{ \frac{116}{490} \right\}$$

(٤٥) أكتب الحد العام للمتتالية

٢، $(1 \frac{1}{3})^2$ ، $(1 \frac{1}{3})^3$ ، ...، $(1 \frac{1}{3})^n$

إرشاد: أكتب العدد الأول $2 = (1 \frac{1}{3})^1$ إن جاز التعبير

والمتسلسلة $1 + 8 + 27 + \dots$

والمتتالية ٢، ٤، ٦، ...

والمتسلسلة $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$

والمتتالية ٢، ٤، ٨، ...

(٤٦) ما رتبة الحد الذي قيمته ٦ في المتتالية ١,٥، ١,٨، ٢,١، ...

{١٦}

(٤٧) أي من المتتاليات الآتية حسابية وما أساسها إن كانت كذلك ؟

«١» ٣٣، ٢٩، ٢٥، ...

«٢» ٢، ٤، ٨، ...

«٣» ٢، $\frac{7}{4}$ ، $\frac{3}{2}$ ، ...

«٤» ١، -٦، -١٣، ...

المتتاليات والمتسلسلات



(٤٨) رُتبت مقاعد مسرح في ٣٠ صفاً هكذا، في الأول وضع ٢٢ مقعداً وفي الثاني وضع ٢٥ مقعداً وفي الثالث وضع ٢٨ مقعد، ما عدد مقاعد الصف الأخير.

(٤٩) أوجد مجموع المتسلسلة $٩٨ + ٠٠٠ + ١٣ + ٨ + ٣$ $\{١٠١٠\}$

$$\text{ومجموع المتسلسلة } \sum_{n=1}^{20} (١ + ٣n)$$

(٥٠) ما عدد الحدود التي يجب أن تؤخذ من المتسلسلة $٠٠٠ + ١٧ + ٢١ + ٢٥$ ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها يساوي $- ١٤$ ؟

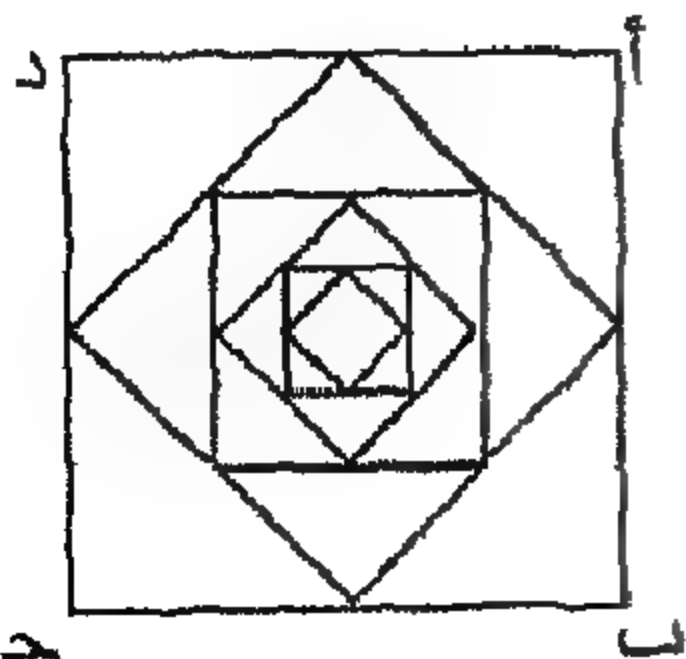
(٥١) ما عدد حدود المتسلسلة $\frac{1}{٤} + ٠٠٠ + ٤ + ٨ + ١٦$ $\{ \frac{1}{٤} \}$

(٥٢) اشترت سعاد سيارة بمبلغ ١٥٠٠٠ دينار فإذا كانت قيمتها تنقص كل سنة بمعدل ١٠٪ من قيمتها في السنة السابقة، ما قيمة السيارة في نهاية السنة العاشرة ؟

(٥٣) متتالية هندسية حدها الثالث يساوي ٦٤ وحدها السابع يساوي $\frac{1}{٤}$ ، فما حدها الأول ؟

(٥٤) أوجد مجموع المتسلسلة $٠٠٠ + ٠,٠١ + ٠,١ + ١$

(٥٥) أ ب ج د مربع طول ضلعه ١٠ سم نُصفت أضلاعه ووصلت نقاط التقصيف فشكّلت مربعاً آخر ثم نصفت أضلاع المربع الجديد ووصلت فشكّلت مربعاً آخر وهكذا كما في الشكل.



احسب مجموع مساحات المربعات الناتجة إلى ما لانهاية



المتتاليات والمتسلسلات



(٥٦) إذا كانت ٤، س، ١٦، ... متتالية هندسية

وكانت ٤، ص، ١٦، ... متتالية حسابية

{٥ : ٤}

ما النسبة بين قيمتي المتغيرين س، ص

(٥٧) أكتب الحد العام للمتتالية

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{0}, \overline{0}, \text{ عدد طبيعي فردي} \\ \text{صفر، عدد طبيعي زوجي} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \end{array} \right\}$$

(٥٨) ما عدد الأعداد الطبيعية الواقعة بين العددين الطبيعيين ١٠٠، ٥٠٠ والتي كل

{٣٦}

منها يقبل القسمة على ١١ ؟

$$(٥٩) \text{ أوجد مجموع المتسلسلة } \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{7}{6} + \dots + \frac{41}{6}$$

إرشاد: حسابية

(٦٠) تتكون متسلسلة من ١٠ حدود مجموع الخمسة الأولى منها يساوي ٧ ومجموع

الخمس الثانية (الأخيرة) منها يساوي ١٢، أكتب هذه المتسلسلة بذكر جميع

حدودها .

$$\text{إرشاد: مجموع العشرة حدود الأولى منها } = 7 + 12 = 19$$

(٦١) إذا كان الوسط الحسابي للعددين ١١ ص، - ١٣ ص هو - ٧ فما قيمة ص

{٧}

(٦٢) متسلسلة هندسية منتهية، حدها الأول = $\frac{1}{32}$ وأساسها = $\frac{1}{2}$ ومجموعها

$$\frac{250}{32} \text{ أكتب الحدود الخمسة الأولى منها.}$$



المتتاليات والمتسلسلات



(٦٣) ما قيمة s لتشكّل الأعداد $s - 4$ ، $s + \frac{3}{2}$ ، $s + 18$ متتالية هندسية.

(٦٤) إذا كانت الأعداد A ، B ، C تكون متتالية حسابية، وكانت الأعداد A ، B

$$-A، B - C تكون متتالية هندسية، بين أن $A = \frac{1}{3}B = \frac{1}{5}C$$$

(٦٥) متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الثاني $= 6$ ومجموعها $= 24$ أكتب الحدود الخمسة الأولى منها.

(٦٦) إذا كان الحد الأول من متتالية حسابية هو الواحد الصحيح وأساسها هو العدد 4 ، فهل يكون العدد 191 من حدودها ؟

(٦٧) كم عدد الأعداد الطبيعية المكونة من منزلتين والتي هي من مضاعفات العدد 7 ؟

(٦٨) متسلسلة حسابية تزايدية (قيم حدودها تزداد باستمرار) مجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوي 27 ومجموع مربعاتها يساوي 275 ، أكتب هذه الحدود الثلاثة فقط.

(٦٩) عدد طبيعي مكون من ثلاث منازل، تشكّل أرقامه متتالية هندسية، وإذا طرحنا منه العدد 792 ينتج عدد مكون من الأرقام الثلاثة نفسها ولكن بشكل معكوس وإذا جمعنا العدد 2 إلى الرقم الثاني شكلت أرقام العدد الناتج متتالية حسابية، فما العدد ؟

{٩٣١}

(٧٠) أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة التي حدها العام

$$u_n = (1 - \frac{1}{n}) \times 1 - \frac{1}{n}$$



المتتاليات والمتسلسلات

$$\{ \frac{1}{10^n} + 2 \} \dots + 2,001 + 2,01 + 2,1$$

إرشاد: استعن بالمتسلسلة الهندسية

والحد العام للمتتالية

$$\{ \frac{1+2}{1+2^n} \} \dots , \frac{5}{17} , \frac{4}{10} , \frac{3}{5} , 1$$

(٧٢) أكتب الأعداد العشرية التالية على صورة $\frac{1}{b}$ كأعداد نسبية

$$0,24 \quad , \quad 0,112 \quad , \quad 0,6245$$

$$\{ \frac{687}{1100} , \frac{112}{99} , \frac{8}{33} \}$$

إرشاد: استعن بالمتسلسلة الهندسية اللانهائية التقاربية

(٧٣) أكتب المتسلسلة $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ باستخدام رمز المجموع

إرشاد: جد حدها العام

(٧٤) ما مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التقاربية $12 - 6 + 3 - \dots$ {٨}

(٧٥) جد مجموع المتسلسلة $7 + 13 + 19 + \dots + 127$

إرشاد: حسابية

(٧٦) هل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$ حسابية أم هندسية ؟

(٧٧) ما أساس المتتالية $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \dots$ {٢}

إرشاد: هندسية

لعدد السكان الأصلي)، قدر عدد سكانها بعد ٥ سنوات ؟

(٨٠) جد مفكوك $(1 - q^3) \sum_{i=0}^3 «١» (1 - q^2) \sum_{i=0}^4 «٢» 3 \sum_{i=0}^5 «٣»^{1+q}$

وعدد حدود المتسلسلة $1 - 2 + 4 - 8 + \dots - 64$

(٨٢) أوجد مجموع المتسلسلة $٣ - ٢٣ + ٢٣ - ٣ - \dots - ٢٣ - ٣$

(٨٣) كم حداً من المتسلسلة الحسابية $9 + 11 + 13 + \dots + 00$ يجب أخذه ليكون

المجموع مساوياً لمجموع تسعة حدود من المتسلسلة الهندسية $2 - 6 + 12 - \dots$

 $\{1A\}$

(٨٤) أربعة أعداد حقيقية، تشكل الثلاثة الأولى منها متتالية هندسية، وتشكل

الثلاثة الأخيرة متتالية حسابية أساسها ٦ وكان العدد الأول منها = العدد

الرابع، فما هي هذه الأعداد.

$$\{\lambda, \gamma, \varepsilon - \lambda\}$$


المتتاليات والمتسلسلات



(٨٥) أكتب المتتالية الحسابية التي مجموع n من حدودها $= n^2 + 2n$

$\{ \dots, 7, 5, 3 \}$

إرشاد: $ج_1 = ج_1$ حيث $ج_1$ المجموع

$$ج_1 = ج_1 - ج_2 \text{ وكذلك } ج_2 = ج_2 - ج_3$$

(٨٦) مثلث متساوي الأضلاع محيطه ١٨ سم، نُصفت أضلاعه ووصل بينها فتكون

مثلث ثاني ثم نصفت أضلاع المثلث الثاني ووصل بينها فتكون مثلث ثالث

وهكذا، أوجد مجموع محيطات المثلثات المتكونة إلى ما لانهاية.

(٨٧) ثلاثة أعداد تشكل متسلسلة هندسية مجموعها $\frac{1}{6}$ وحاصل ضربها ٨،

فما هي هذه الأعداد ؟

$$(٨٨) \text{ ما نوع المتسلسلة } \sum_{k=1}^{\infty} (3k + 2) ؟$$

(٨٩) أكتب الحد العام لكل من المتسلسلات

$$«١» 32 + 16 + \frac{1}{8} + \dots$$

$$«٢» \left(\frac{1}{4} - 3 \right) + \left(\frac{1}{3} - 2 \right) + \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{1}{1+n} - n \right)$$

$$«٣» \dots + {}^2\left(\frac{1}{2} \right) + {}^2\left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

(٩٠) احسب مجموع كل من المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{9} \right)^n \quad \sum_{n=2}^6 (1 + {}^2n)$$



$$(91) \text{ أكتب مفكوك المتسلسلة } \sum_{n=0}^{\infty} (2-3n) \cdot 1^{-n}$$

$$(92) \text{ أكتب المتسلسلة } 1, 3, 5, \dots, 249 \text{ باستخدام رمز المجموع } \sum$$

(93) في تدريب لسباق المارثون المنتظر قطع أحد الرياضيين في اليوم الأول مسافة 3 كم وفي اليوم الثاني 6 كم وفي اليوم الثالث 9 كم وهكذا، فإذا قطع في آخر يوم للتدريب 36 كم.

احسب الحد العام للمتتالية التي تمثل المسافات المقطوعة في الأيام المختلفة ؟
 $\{ 3, 6 \}$

$$(94) \text{ هل المتتاليات «1» } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

$$\text{متساويتان ؟} \quad \text{«2» } 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \dots$$

إرشاد: تتساوى المتتاليات بشكل عام كالإقترانات، إذا كان لها نفس المجال ونفس الحد العام

(95) أكتب الحدود أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات والمتسلسلات التالية:

$$\text{«1» المتتالية التي حدها العام : } \frac{2n}{1+n^2} =$$

$$\text{«2» المتتالية } 3, 3, 3, \dots$$

$$\text{«3» المتسلسلة } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{3+n}$$

$$\text{«4» المتسلسلة } 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

المتتاليات والمتسلسلات

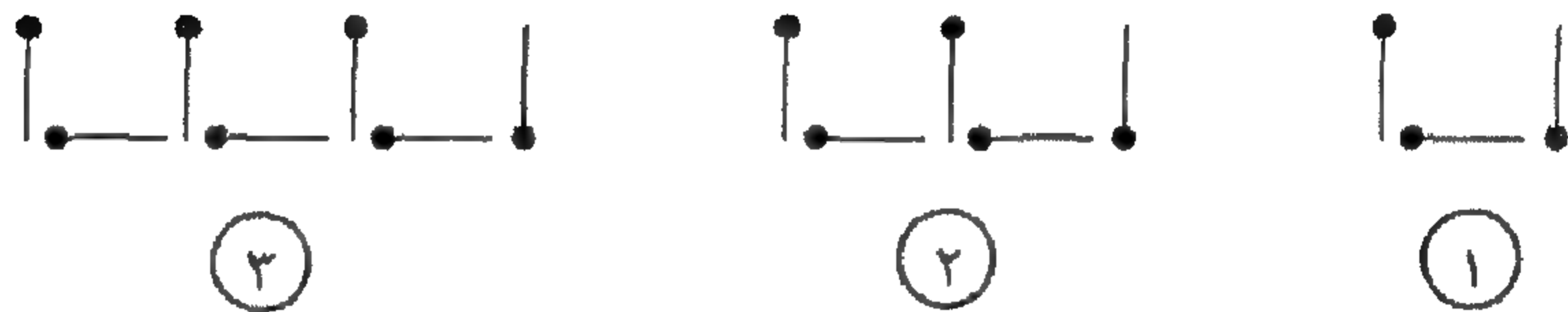


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n)^n}{2} \quad \text{« ٥ » المتسلسلة}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n-2)(1+n)^n}{6} \quad \text{« ٦ » المتسلسلة}$$

$$2 \left(\frac{(1+n)^n}{2} \right) \sum \quad \text{« ٧ » المتسلسلة}$$

(٩٦) رُتبت مجموعة من أعواد الثقاب كما هو مبين في الأشكال



فإذا استمر الترتيب على نفس النمط، فكم عوداً من الثقاب يلزم لعمل كل
من الشكلين الرابع عشر والرابع والعشرين
إرشاد: أوجد أولاً الحد العام للمتتالية الناتجة

(٩٧) متتالية حدها الرابع ١١، وحدها السابع ٢٠، فما حدها التاسع {٢٦}

(٩٨) ما مجموع الحدود المئة الأولى والحدود المئة الثانية من المتسلسلة

$$000 + 10 + 10 + 0$$

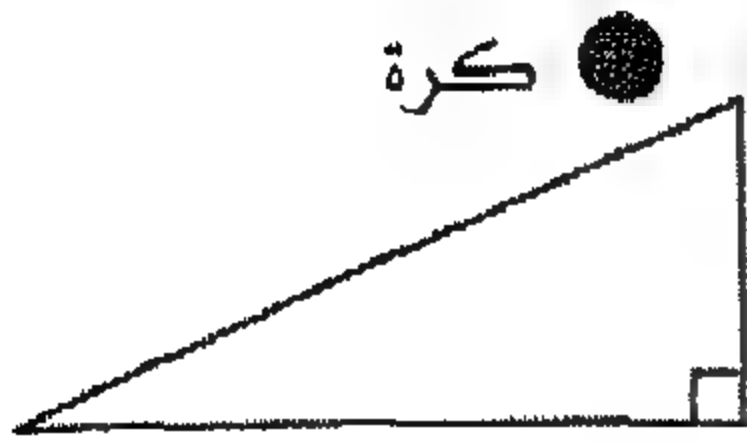
(٩٩) إذا كان مجموع أول n حداً من متسلسلة حسابية يساوي $2n^2 - 7n$ فما
قيمة الحد العاشر في هذه المتسلسلة.

إرشاد: $ج_١ = ج_١ - ج_٠$ حيث $ج$ المجموع





(١٠٠) تتدحرج كرة حديدية على منحدر طوله ٣٦ متراً



كما في الشكل فتقطع في الثانية الأولى ٤ سم

والثانية الثانية ١٢ سم والثانية الثالثة ٢٠ سم وهكذا

كم ثانية تستغرق الكرة في قطع المنحدر كاملاً ؟

$$(١٠١) \text{ جد مجموع المتسلسلة } \sum_{n=0}^{30} (2 - 5n)$$

(١٠٢) ما عدد حدود المتتالية ١، ٣، ٩، ...، ٢٤٣

إرشاد: استعن بالحد العام

(١٠٣) متتالية هندسية حدها الأول = ٣ وحدها الرابع = ٢٤ جد حدها الثامن.

(١٠٤) أوجدت خلود مجموع المتسلسلة ٢ - ٤ + ٨ - ١٦ + ٣٢ - ٦٤ + ١٢٨ - ٢٥٦ فكان ٣٤٢، فسر

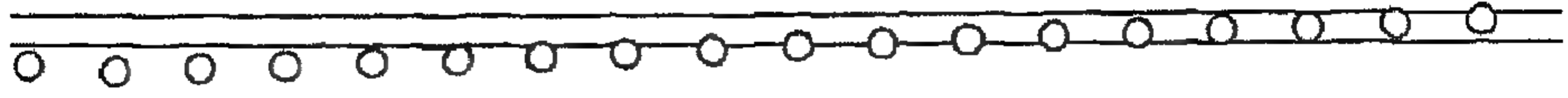
كيف حصلت على الجواب ؟

(١٠٥) ما مجموع كل من المتسلسلات التالية:

$$\{2\} \quad \text{«١» المتسلسلة } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{«٢» المتسلسلة } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{«٣» المتسلسلة } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$



(١٠٦) خططت أسرة لتوفير مبلغ ٢٠٠٠ دينار لصيانة البيت القاطنين فيه فما قيمة

الدفعة المنتظمة التي على الأسرة أن تودعها في البنك كل ٣ شهور ولمدة سنتين

علماً بأن بعض فوائده مركبة ٨٪ سنوياً تحسب كل ربع سنة.

(١٠٧) ما النسبة بين الحد الرابع في متتالية حسابية حدها الأول ٣ وأساسها ٢ -

والحد الخامس في متتالية هندسية حدها الأول ٣ - وأساسها ٢ ؟

(١٠٨) ما عدد حدود المتسلسلة ٧٧ + ٦٩ + ٦١ + ٠٠٠ + ١٣

(١٠٩) إذا كانت أ، ٧، ...، ب، ٢٥، ... متتالية حسابية وكانت ب = ١٥ + ٢ فما

قيمة كل من أ، ب

(١١٠) يُريد هُمام توفير ٦٠٠٠ دينار (جملة دفعات) في مدة سنتين لكي يؤثث شقته

الجديدة فكم دينار يجب عليه أن يودع شهرياً في حسابه البنكي لكي يوفر

هذا المبلغ ؟

علماً أن البنك يعطي فائدة مركبة معدلها السنوي ٦٪ والفوائد تحسب كل شهر.

(١١١) حصلت وسام أثناء دراستها الجامعية على قرض دراسي قيمته ٩٠٠ دينار وبعد

تخرجها من الجامعة وحصولها على وظيفة ما عليها أن تسدد القرض بواقع ٧٥

دينار شهرياً ولمدة سنة واحدة فقررت إيداع مبلغ معين في بنك يعطي فائدة

مركبة مقدارها ٨٪ سنوياً تحسب كل شهر.

ما المبلغ (القيمة الحالية للدفعات) التي يجب إيداعها في البنك الآن ولمدة سنة

لكي تسحب منها الأقساط الشهرية سداداً لقرضها ذاك ؟



(١١٢) إذا كان الحد العام لمتتالية فيبوناتشي (١١٧٥ - ١٢٥٠) م الرياضي الإيطالي

هو $h_n = h_{n-1} + h_{n-2}$ ، أكتب الحدود السبعة الأولى منها.

(١١٣) عرض بائع فواكه كومة من البرتقال على شكل هرم رباعي قاعدته مربعة

تحتوي طول ضلع الطبقة السفلى منه ١٦ حبة برتقال ويقل طول ضلع كل

طبقة عن الطبقة التي دونها بمقدار حبة واحدة.

أوجد مجموع حبات البرتقال في كل طبقة من الطبقات، ثم أوجد مجموع حبات

البرتقال في الكومة كلها.

إرشاد: حبات البرتقال في الطبقات تشكل متسلسلة هكذا $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots$

$14^2 + 15^2 + \dots + 17^2$ ، ودون الترييع فهي حسابية

(١١٤) أدخل ٦ أوساط حسابية بين العددين ٣ ، ٣٨

(١١٥) ما عدد الأعداد الطبيعية التي تقبل كل منها القسمة على ٧ والأقل من ٣٠٠ ؟

(١١٦) إذا كانت قياسات زوايا مثلث تشكل متتالية حسابية قياس أصغرها 20°

فما قياس كل من الزاويتين الأخرتين ؟ $\{20^\circ, 60^\circ, 100^\circ\}$

(١١٧) إذا كانت زوايا مثلث تشكل متتالية حسابية أساسها 10° فما قياسات زوايا

ذلك المثلث ؟ $\{50^\circ, 60^\circ, 70^\circ\}$

(١١٨) إذا كانت قياسات زوايا شكل رباعي تشكل متتالية حسابية فجد قياسات

الزوايا تلك ؟ $\{36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ\}$

إرشاد: الزوايا بالنسبة ١ : ٢ : ٣ : ٤ واستعمل التقسيم التناسبي





(١١٩) أدخل عددًا من الأوساط الحسابية بين العددين ٣، ٣٣ وكان الوسط

الحسابي الرابع منها = ٢٣ ، جد عدد الأوساط الحسابية المدخلة {٥}

إرشاد: والأساس أيضاً ٥

(١٢٠) أعط أمثلة عددية تُبين فيها أن:

«١» إذا أضيف عدد ثابت مثل جـ إلى كل من حدود متتالية حسابية فالناتج متتالية حسابية.

«٢» إذا ضرب كل حد من حدود متتالية حسابية بعدد ثابت جـ \neq صفر فالناتج متتالية حسابية.

«٣» المتتالية الناتجة من جمع الحدود المتناظرة من متتاليتين حسابيتين تكون متتالية حسابية.

(١٢١) سقط جسم غريب من طائرة (مع إهمال مقاومة الهواء) فقطع في الثانية الأولى

٤,٩ متروفي الثانية الثانية ١٤,٧ متروفي الثانية الثالثة ٢٤,٥ متروفي هكذا:

ما المسافة التي قطعها الجسم الغريب بعد ١٠ ثوانٍ ؟

(١٢٢) تدق ساعة حائط مرة واحدة عند الساعة الواحدة ومرتين عند الساعة الثانية

وثلاث مرات عند الساعة الثالثة وهكذا حتى الساعة الثانية عشرة ثم تعيد الكرة

من جديد ، حكم مرة تدق في اليوم (نهار وليل) وفي أسبوع وفي شهر (٢٠ يوم) ؟

(١٢٣) أوجد الحد العاشر للمتسلسلة ٠,٧ + ٠,٧ + ٠,٧ + ٠,٧ + ٠,٧ + ٠,٧ + ٠,٧ + ٠,٧ + ٠,٧ + ٠,٧

(١٢٤) مثل المتتالية التي حددها الصامح $\left(\frac{1}{n}\right)$ ببيانها على المستوى

الديكارتي.

والثالث في المتتالية ح ٢٤ = ٢٤ (٣)

(ترتفع) إلى $\frac{4}{5}$ العلو السابق. جد مجموع المسافات التي تقطعها الكرة حتى تسكن.

$$\{90 \text{ متر} = 50 + 40\}$$

اكتب أول ٥ حدود منها {أساسها = $\frac{1}{3}$ }

واحد وأحلّ محله لتراً من الماء ثم أفرغ مرة أخرى وأحلّ محله لتر من الماء وهكذا:

جد قوة تركيز المحلول بعد إجراء العملية ٥ مرات.

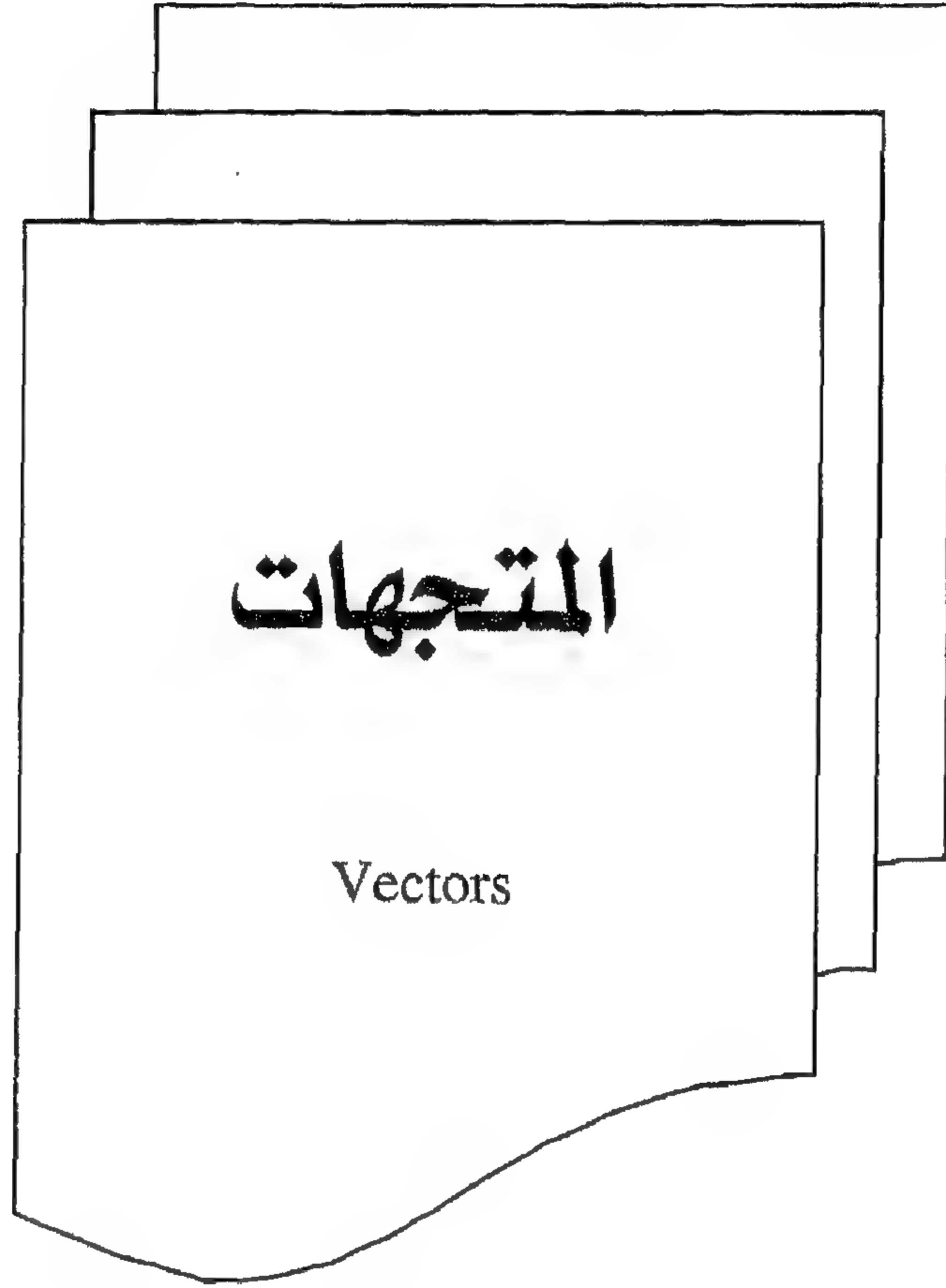
بين أن الأعداد س، ص، ع، تشكل متتالية هندسية.

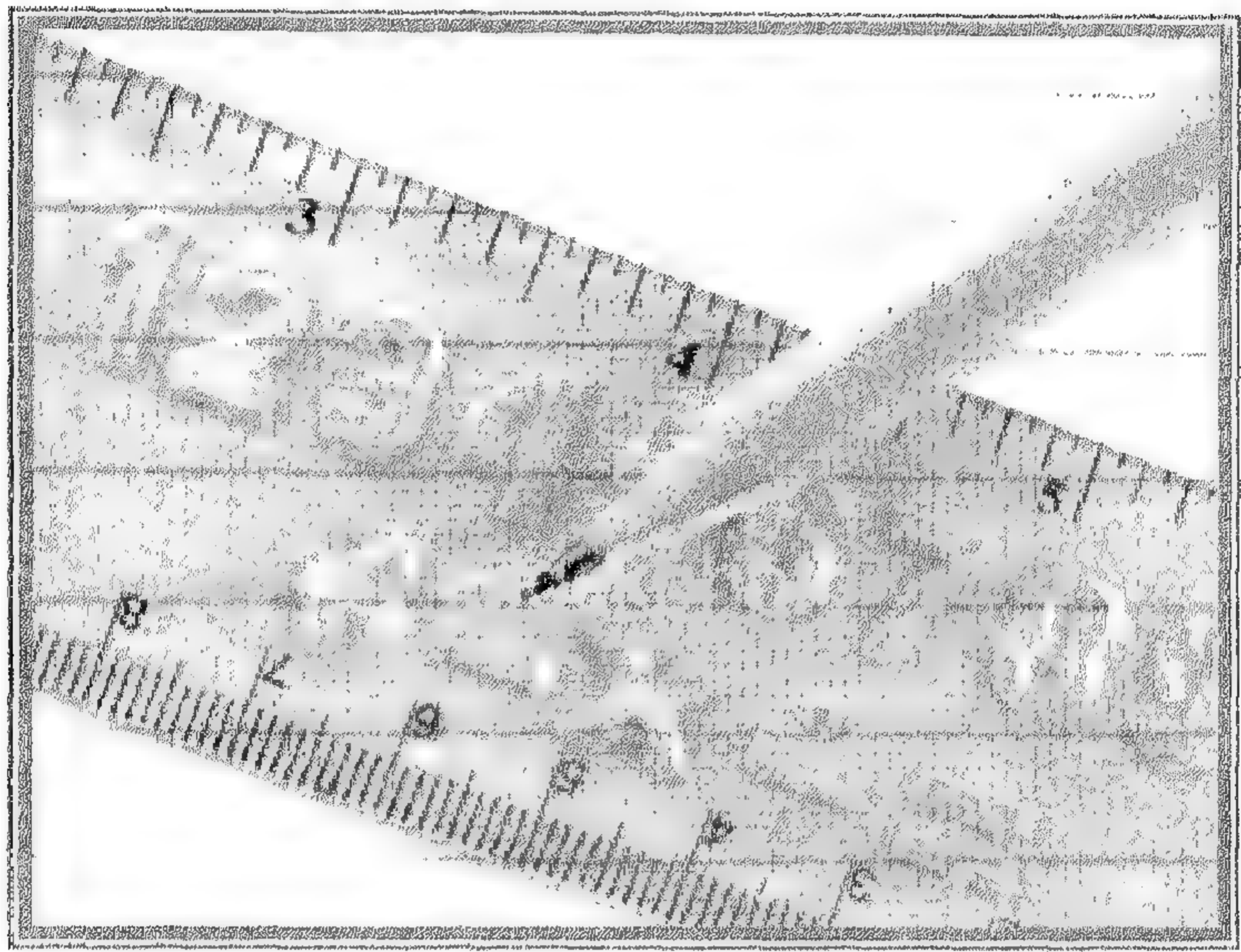
إرشاد: استخدم الأسس النسبية وأساس المتتالية

منها = ١ والعدد السادس = ١١ ، أكتب هذه الأعداد بشكل متسلسلة

حسابية. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

17. 





المتجهات



هناك كميات يمكن وصفها بالمقدار فقط مثل المساحة والكتلة والحجم.

وهناك كميات أخرى لا يمكن وصفها إلا بالمقدار والاتجاه مثل السرعة والتسارع والقوة، وهذه الكميات بالذات تسمى الكميات المتجهة ولكننا في الرياضيات نسميها المتجهات.

وبما أن للمتجهات كما لمعظم فروع الرياضيات، بناء جبري وآخر هندسي، يرتبطان معاً برابط متين كونهما مكملين لبعضهما البعض بكل اتساق وترتيب.

لذا:

فدراستنا للمتجهات ستسير على طريقة المزج بين البنائين المذكورين بأسلوب بسيط دون حشو وبلا تعقيد كما يلي:

(١٦ - ١) العمليات الهندسية والجبرية على المتجهات في المستوى

يُمثل المتجه هندسياً على المستوى بقطعة مستقيمة لها نقطة بداية Initial Point تسمى النقطة س على سبيل المثال ونقطة نهاية Teriminal Point

تسمى النقطة ص وعلى سبيل المثال، عندها يرمز للمتجه بالرمز \overrightarrow{SV} أو

\overleftarrow{VS} كما في الشكل



أما طول \overrightarrow{SV} فيرمز له بالرمز $|\overrightarrow{SV}|$ «القيمة المطلقة» أو $|\overleftarrow{VS}|$ وهذا يمثل عدد حقيقي.

قبل مناقشة العمليات الهندسية على المتجهات علينا أن نوضح بعض المفاهيم والمعطيات التي لها علاقة بالمتجهات وهي:

⊗ المتجه الصفري «Zero Vector»

المتجهات



هو المتجه الذي طوله صفر وليس له اتجاه على الإطلاق ويرمز له

بالرمز $\vec{0}$

⊗ متجه الوحدة «Unit Vector»

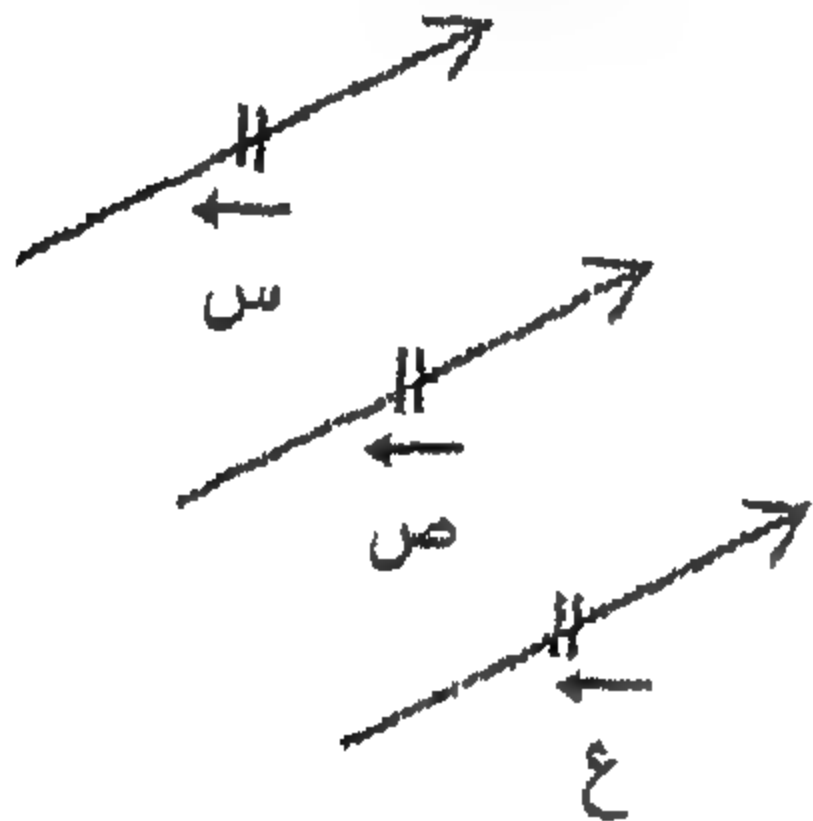
هو المتجه الذي طوله وحدة واحدة ويرمز له بالرمز \vec{e} و \vec{e} للسهولة

فقط.

⊗ المتجهات الحرة «Free Vectors»

تتساوى المتجهات إذا كان لها نفس الطول والاتجاه وهذا ما يُسهّل عملية نقل المتجه من مكان لآخر في المستوى أو إزاحته أو انسحابه كما في الشكل.

فالمتجهات \vec{s} ، \vec{v} ، \vec{e} جميعها متساوية كونها متطابقة من حيث الأطوال.



$$|\vec{s}| = |\vec{v}| = |\vec{e}|$$

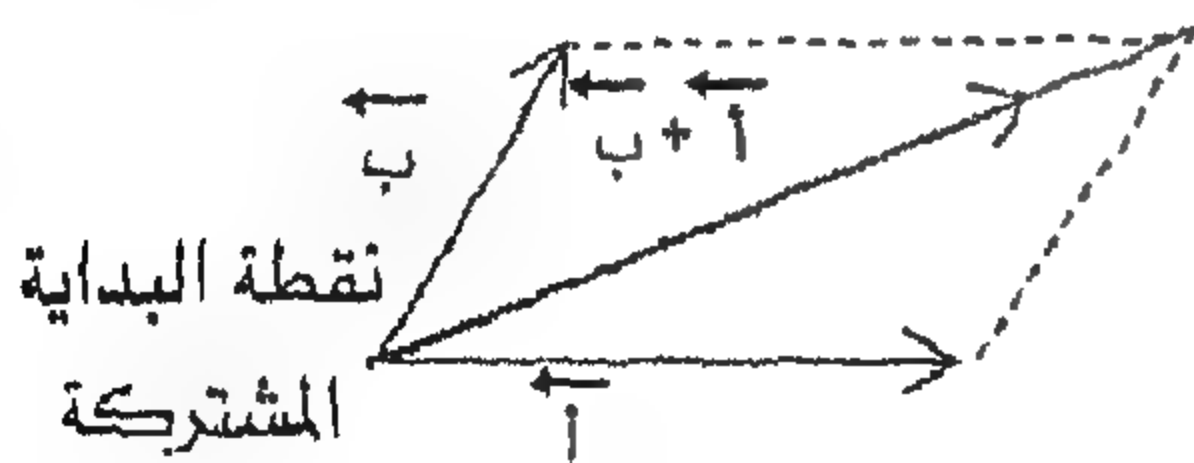
ولها نفس الاتجاه كما يوضح الشكل

أعلاه

⊗ جميع المتجهات:

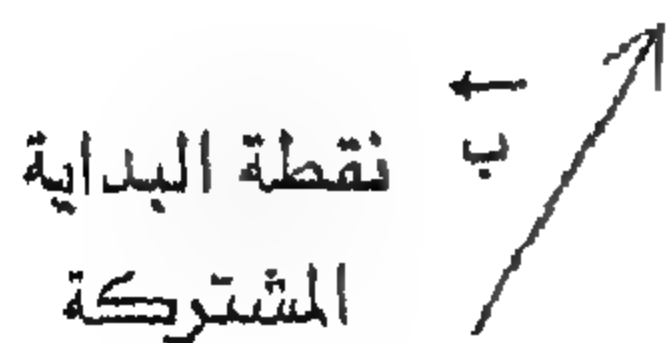
إذا كان \vec{a} ، \vec{b} متجهين فإن $\vec{a} + \vec{b}$ متجه ثالث نحصل عليه

بإحدى القاعدتين التاليتين:



(١) قاعدة متوازي الأضلاع لجمع المتجهات:

اسحب أحد المتجهين وليكن \vec{b} حتى تنطبق



نقطة بدايته على نقطة بداية المتجه \vec{a} ثم أكمل

متوازي الأضلاع فيكون القطر المنطلق من نقطة

المتجهات

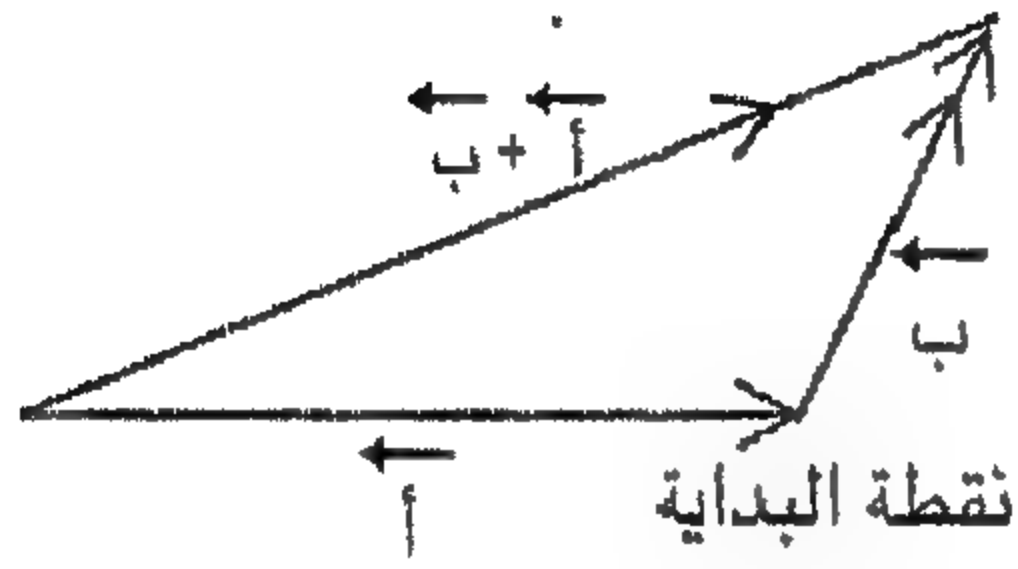


البدايتين (نقطة البداية المشتركة) هو حاصل الجمع + كما في الشكل هكذا:



للمتجهين معاً. $\vec{A} + \vec{B}$ هو المتجه الممثل بالقطر من نقطة البداية المشتركة

(٢) قاعدة المثلث لجمع المتجهات:



اسحب أحد المتجهين وليكن \vec{B} بحيث تنطبق نقطة بدايته على نقطة نهاية المتجه \vec{B}

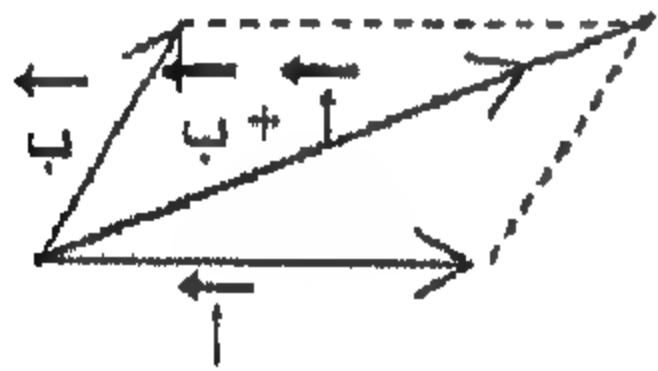
كما في الشكل فيكون الضلع الثالث والذي يبدأ من نقطة بداية \vec{A} وينتهي بنقطة نهاية \vec{B} هو حاصل الجمع $\vec{A} + \vec{B}$



وبشكل عام لجمع متجهين هندسياً هناك

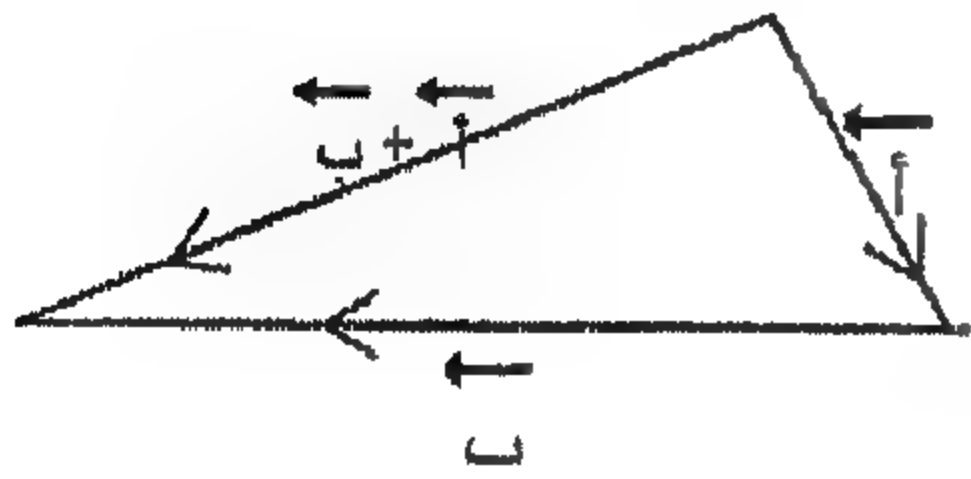
قاعدتين:

الأولى: قاعدة متوازي الأضلاع - والمجموع يمثل قطره المحصور بين



المتجهين.

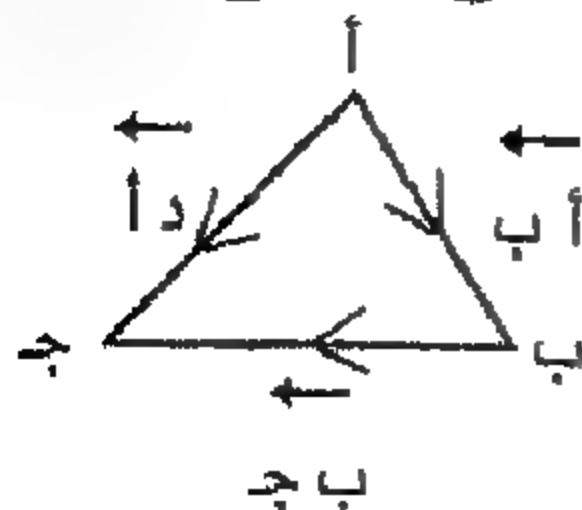
الثانية: قاعدة المثلث - والمجموع ضلعه الثالث.



والآن نورد بعض الخصائص لجمع المتجهات:

أولاً: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ (جميع المتجهات تبديلي)

ثانياً: $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ (قاعدة مثلث، وتسمى علاقة شال)



وبناءً عليه وبشكل عام فإن:



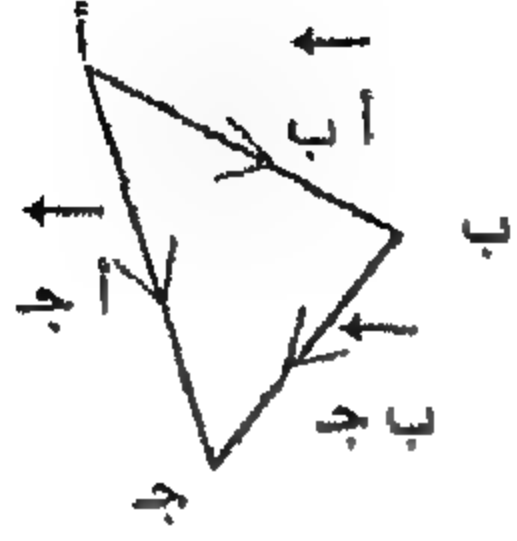
المتجهات



$$\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بج} + \overleftarrow{جأ} = \overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بأ} = \overleftarrow{أأ} = \text{المتجه الصفري}$$

$$\overleftarrow{أأ} = \overleftarrow{أأ} = \overleftarrow{أأ} = \overleftarrow{أأ}$$

كما في الشكل



* سالب المتجه:

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ متجه فإن $-\overleftarrow{أ}$ يسمى سالب المتجه $\overleftarrow{أ}$

وسالب المتجه $(-\overleftarrow{أ})$ هو متجه له نفس طول المتجه $\overleftarrow{أ}$ واتجاه يعاكس اتجاه $\overleftarrow{أ}$ كما في الشكل.



وبشكل عام إذا كان $\overleftarrow{أب}$ متجه فإن سالب المتجه $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{بأ}$

أي أن $\overleftarrow{بأ} = -\overleftarrow{أب}$ (بتغيير نقطة النهاية إلى البداية والعكس)

وكذلك $-\overleftarrow{صص} = \overleftarrow{صص}$

أي أن $\overleftarrow{أب} = \text{سالب } \overleftarrow{بأ}$ ، وكذلك $\overleftarrow{بأ} = \text{سالب } \overleftarrow{أب}$

هذا ويحقق المتجه وسالبه العلاقة التالية:

المتجه + سالب المتجه = المتجه الصفري

أي أن $\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بأ} = \overleftarrow{أأ} = \text{متجه صفري}$ (حسب قاعدة شال)

والآن وباستخدام سالب المتجه سنعرّف عملية طرح المتجهات كما يلي:

$$\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{أ} + (-\overleftarrow{ب})$$

المتجهات



وكذلك $\vec{AB} - \vec{AB} = \vec{0}$ (لأن $\vec{AB} = -\vec{BA}$)

ولتمثيل عملية الطرح $\vec{A} - \vec{B}$ هندسياً باستخدام قاعدة متوازي الأضلاع

نبين أن:



نأخذ سالب أحد المتجهين وليكن \vec{B} وتمثله وتتم عملية الطرح وكأنها جمع

أي أن $\vec{A} - \vec{B}$ تمثل قطر متوازي الأضلاع المكون من المتجهين \vec{A} ، $-\vec{B}$

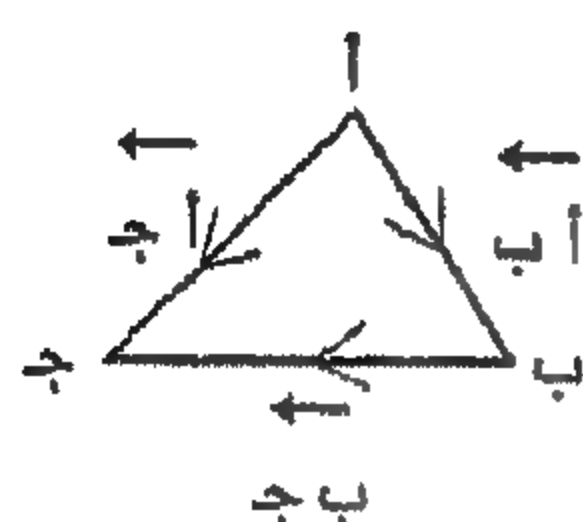
بينما $\vec{A} + \vec{B}$ يمثل قطر متوازي الأضلاع المكون من المتجهين \vec{A} ، \vec{B}

أي أن $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} + \vec{B}$

بينما $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

مثال: إذا كانت النقط A ، B ، C هي رؤوس المثلث ABC ، أوجد

هندسياً مجموع المتجهات $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$



الحل: $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$ (علاقة مثال)

∴ $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$

★ ضرب المتجه بعدد حقيقي:

ملحوظة: عملية ضرب المتجهات تتم على أشكال وسنناقش منها الآن:

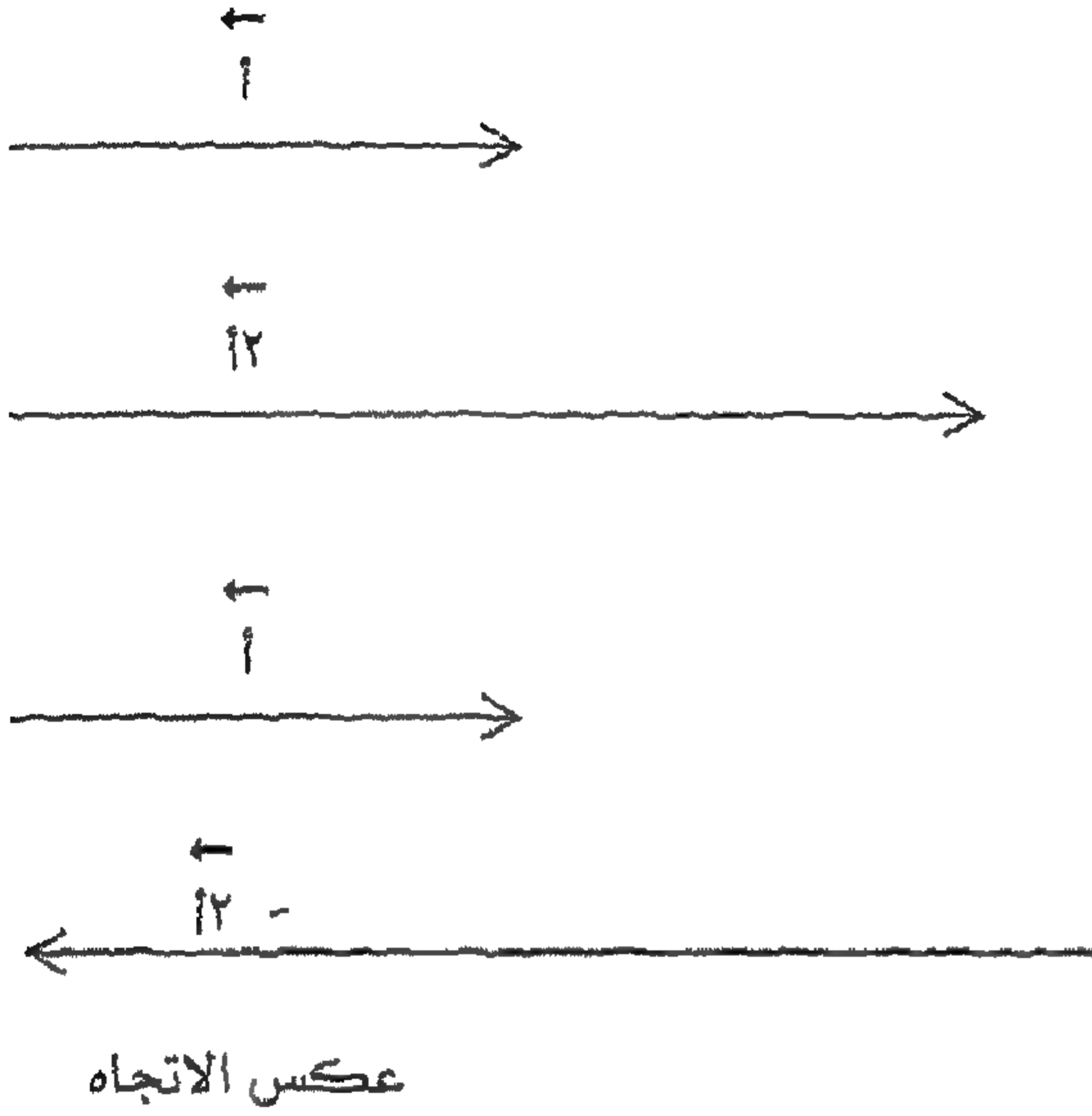
«عملية ضرب المتجه بعدد حقيقي فقط» والبقية ستأتي فيما بعد:

إذا كان \vec{A} متجه غير صفري وكان m عدداً حقيقياً غير الصفري فإن

المتجهات

← م أ هو متجه طوله |م| أ | واتجاهه هو اتجاه المتجه أ نفسه إذا كان م عدد موجب وبعكس الاتجاه إذا كان م عدداً سالباً.

مثال: ٢ أ متجه طوله يساوي ضعف طول أ وله نفس الاتجاه أ
إما - ٢ أ متجه طوله يساوي ضعف طول أ وله اتجاه معاكس لاتجاه أ كما في الأشكال.



أما إذا كان م = صفر أو $\vec{0} = \vec{0}$ أو كلاهما:

فإن: م $\vec{0} = \vec{0}$

كون (صفر) $\vec{0} = \vec{0}$

أو (م) $\vec{0} = \vec{0}$

وكذلك (صفر) $\vec{0} = \vec{0}$


والآن يمكن استنتاج الخواص التالية كضرب المتجه بعدد حقيقي:

(١) إذا كان م، ن عددين حقيقيين

وكان أ، ب متجهين فإن



المتجهات


 $(m + n) = a$ (توزيع الأعداد الحقيقية على المتجه)

$m = (a + b)$ (توزيع المتجه على العدد الحقيقي)

وكذلك $n = (a + b)$ (توزيع المتجه على العدد الحقيقي)

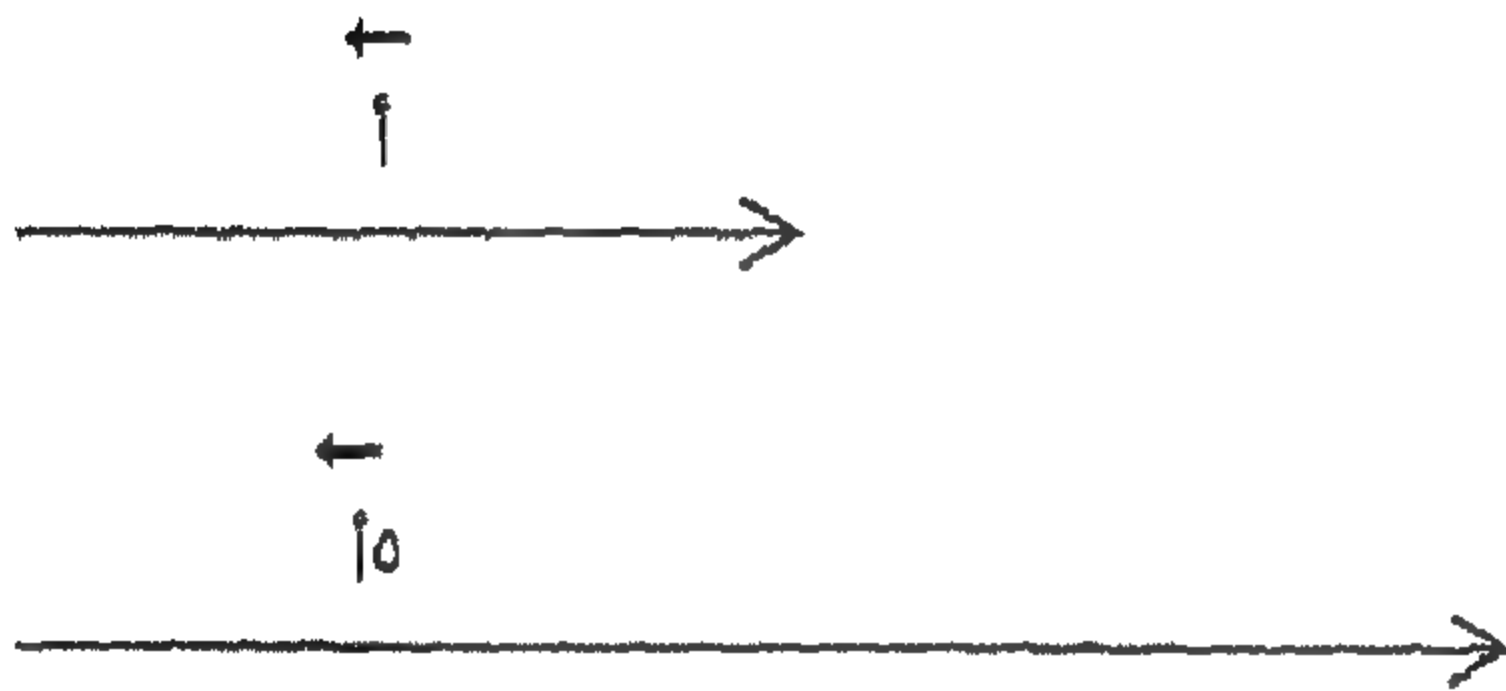
(٢) يتوازي المتجهان إذا ساوى أحدهما حاصل ضرب الآخر بعدد حقيقي غير

الصفر، أي أن:

$a // b$ إذا وفقط إذا كان $b = m \cdot a$ ، $m \neq 0$ صفر

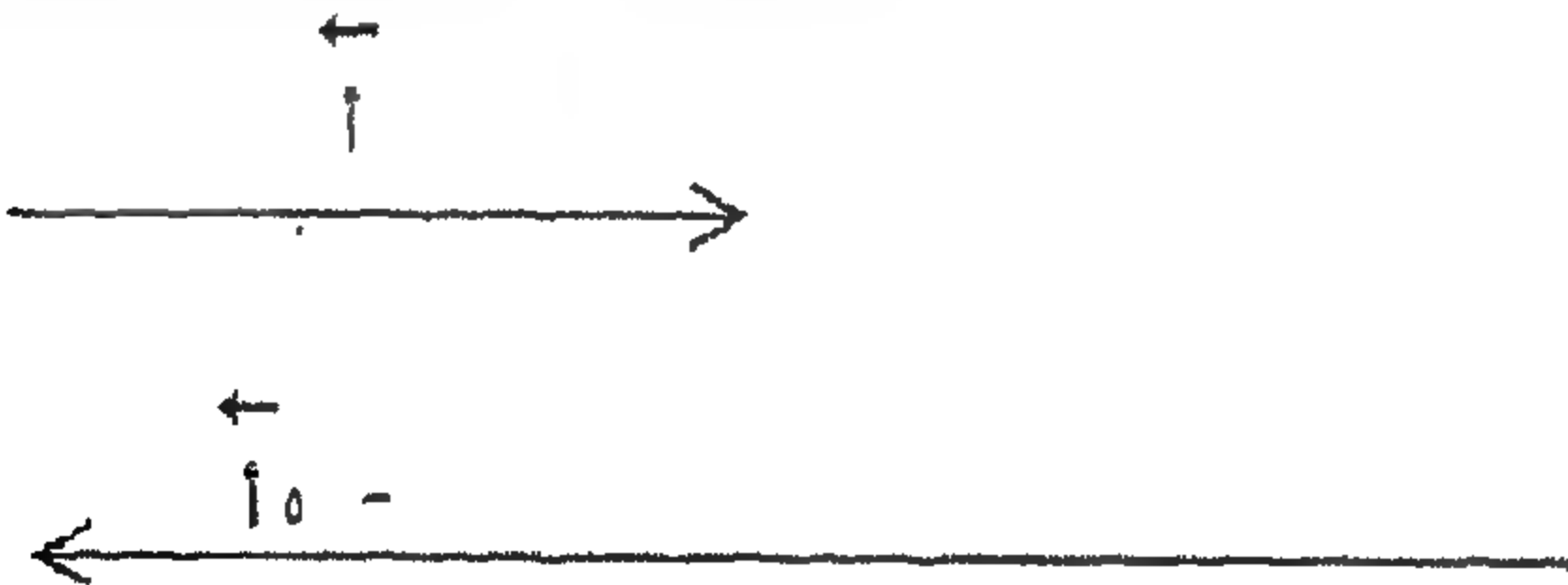
والتفسير: a ، $5a$ متجهان متوازيان.

كون a ، $5a$ لهما نفس الاتجاه كما في الشكل



وكذلك a ، $-5a$ متجهان متوازيان

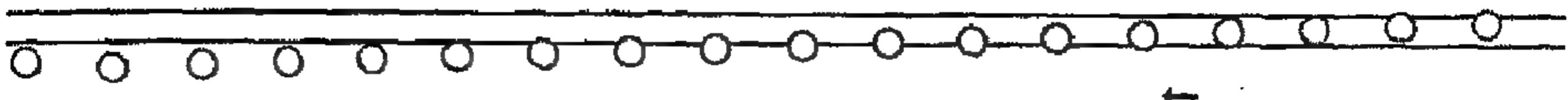
كون a ، $-5a$ لهما اتجاهان متعاكسان كما في الشكل



مثال: إذا كان $|a| = 4$ احسب $|-3a|$

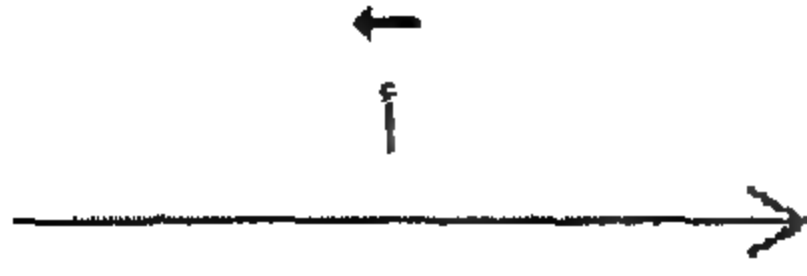
بما أن طول a = 4

المتجهات



$$\text{فطول } -\vec{A} = |-\vec{A}| = |-(4)| = 4$$

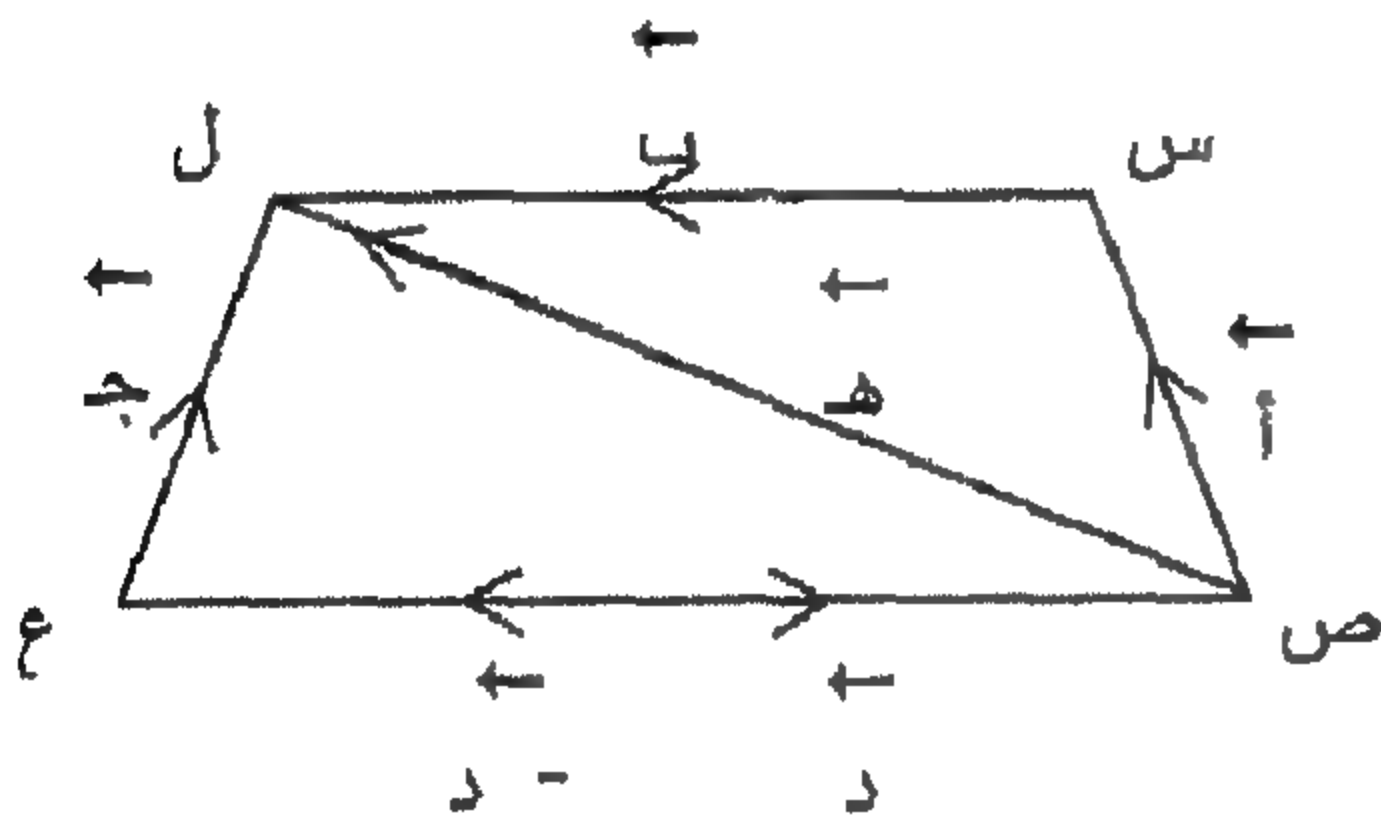
ولكن \vec{A} ، $-\vec{A}$ لها اتجاهان متعاكسان كما في الشكل



أما طول $-\vec{A} = |-\vec{A}| = |-(4)| = 4$ القيمة موجبة لأن الأطوال

كميات غير متجهة لا تقاس إلا بالمقدار فقط.

مثال: من الشكل المجاور بين أن $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ = صفر



نصل القطر ص ل والآن:

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C} \quad (\text{قاعدة المثلث})$$

$$\vec{D} = \vec{C} + \vec{E} \quad \text{ونكمل}$$

(قاعدة المثلث)

$$\vec{D} = \vec{C} + \vec{E} \quad \text{ثم}$$

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} \quad \therefore \text{المطلوب بيانه.}$$

مثال: متى يكون $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$ ؟

$$\vec{A} = \vec{B} \quad \text{الجواب عندما يكون}$$

$$\vec{A} = \vec{B} \quad \text{أو العكس}$$

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C} \quad \text{كون}$$

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C} \quad \text{وكذلك}$$

والحالتين صواب



المتجهات

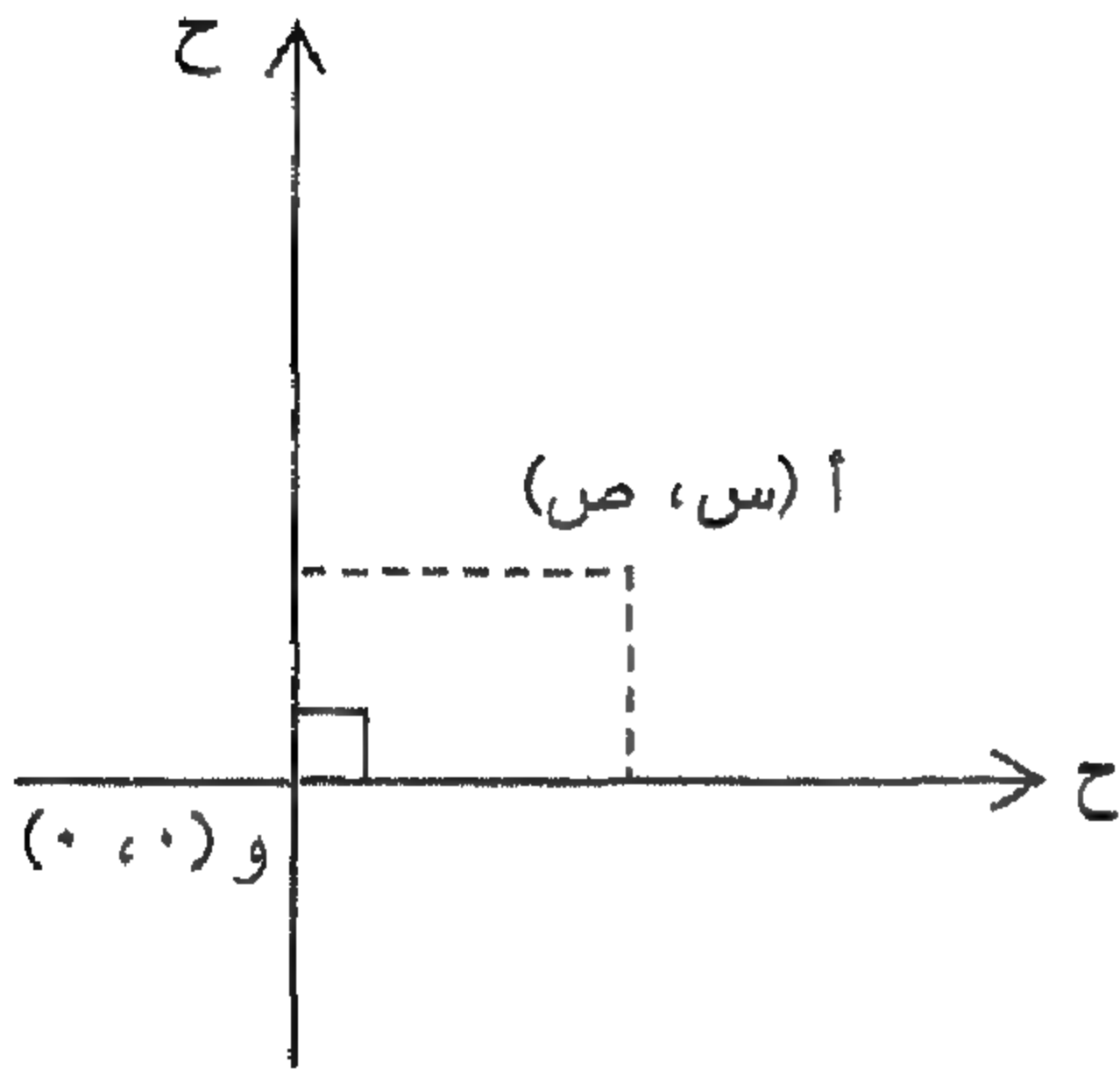


جبر المتجهات في المستوى:

المقصود بجبر المتجهات هو التمثيل الجبري للمتجهات في المستوى بطريقة الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية ثم إجراء العمليات الرياضية عليها:

نذكر أولاً بالنظام الإحداثي المتعامد في المستوى الديكارتي كما في

الشكل من المعلوم أن كل نقطة في المستوى الديكارتي تمثل بزوج مرتب من الأعداد الحقيقية هكذا:



أ (س، ص) وحيث و (0, 0) نقطة الأصل، هذا ما ابتكره ديكارت وأسماه الهندسة الديكارتية أو التحليلية أو هندسة النقط.

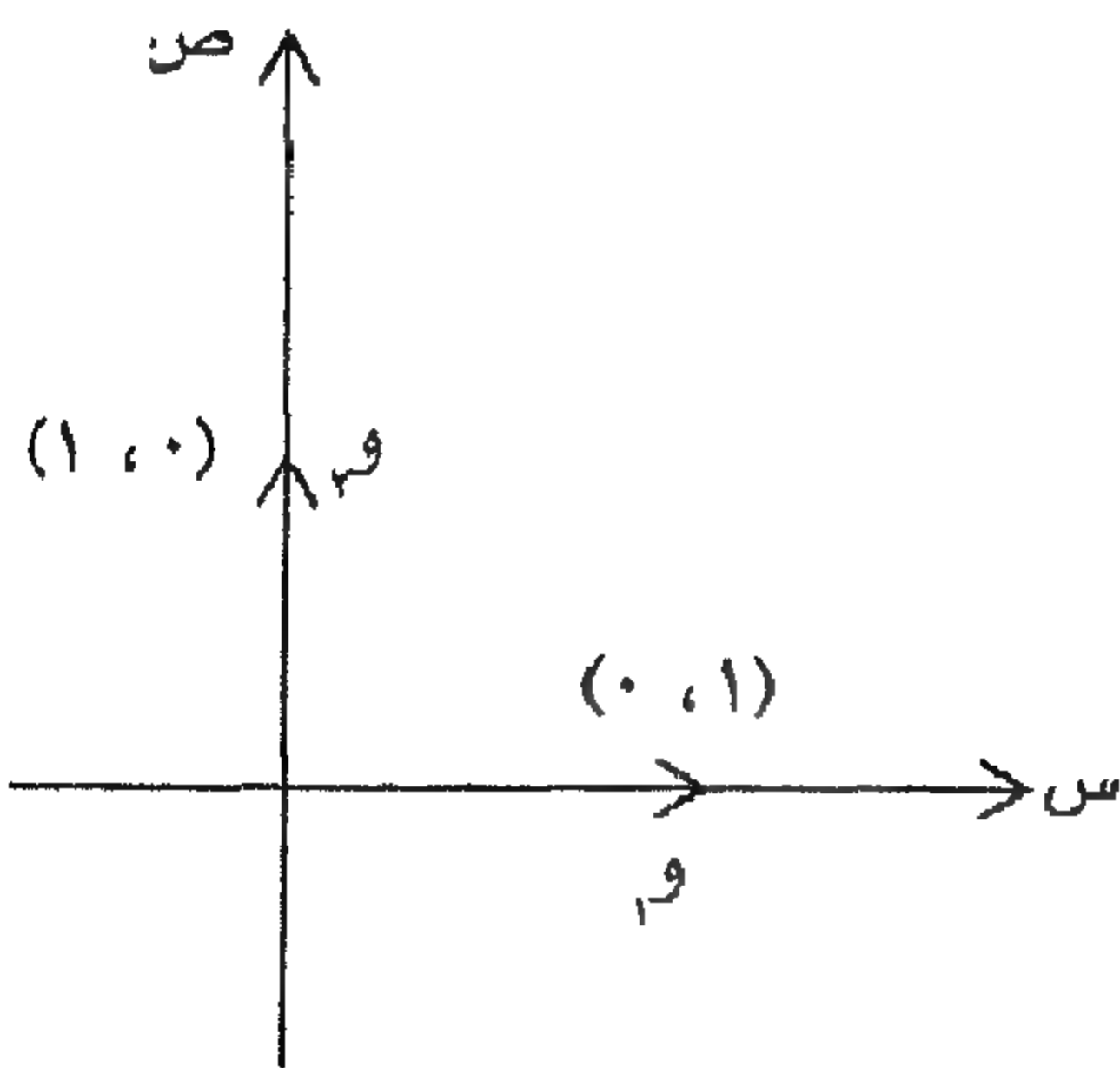
لتمثيل المتجهات في المستوى الديكارتي نُعرّف متجهي الوحدة \mathbf{i} و \mathbf{j} حيث

متجه \mathbf{i} يبدأ من نقطة الأصل وباتجاه محور السينات الموجب.

متجه \mathbf{j} يبدأ من نقطة الأصل

وباتجاه محور الصادات الموجب.

كما في الشكل



حيث \mathbf{i} ← (1, 0)

و \mathbf{j} ← (0, 1)

وبناء عليه يمكننا كتابة المتجه \mathbf{A} على

صور متجهين كما يلي:

المتجهات

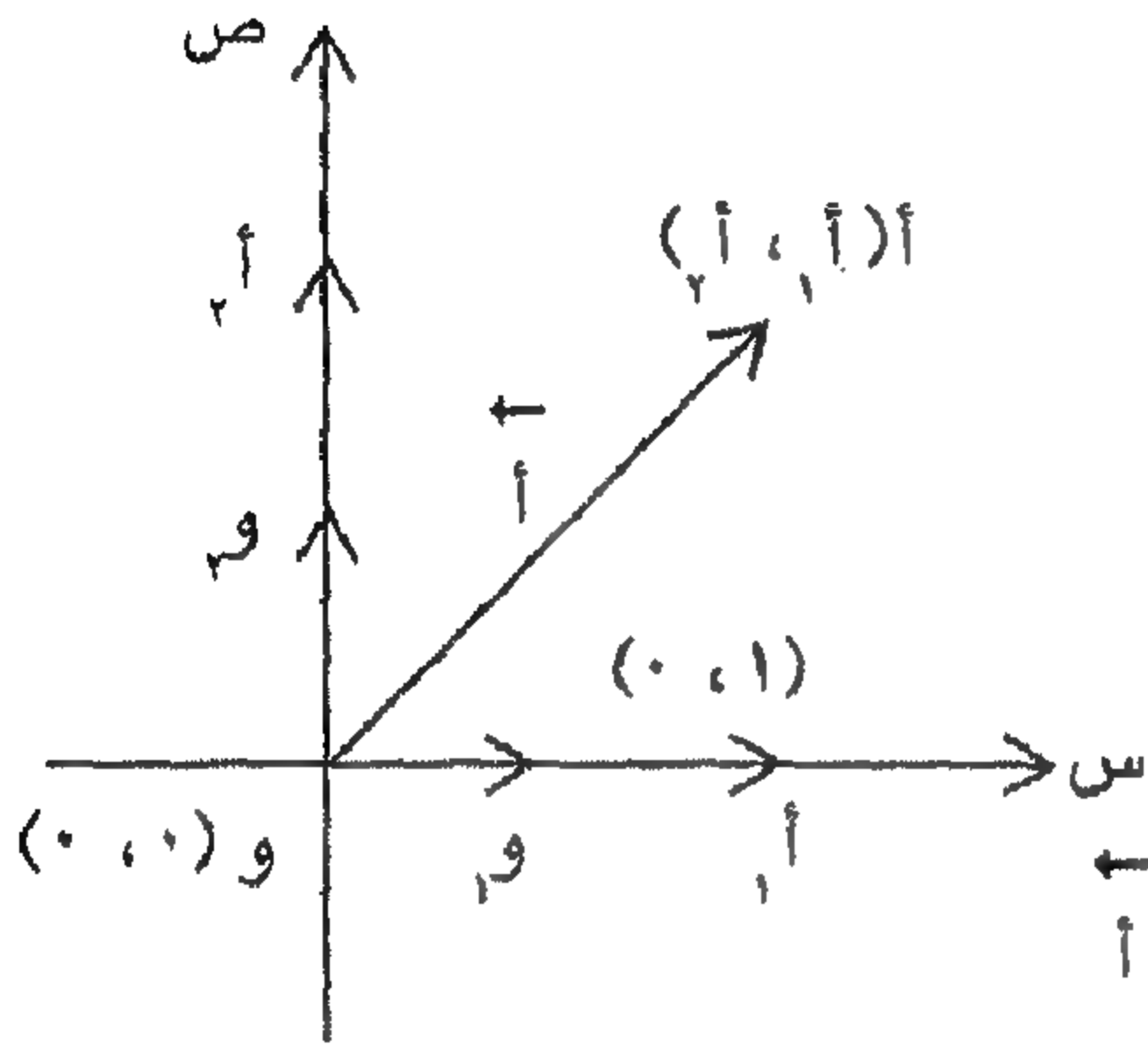


الأول مواز لمحور السينات وطوله \vec{a}_1

الثاني مواز لمحور الصادات وطوله \vec{a}_2

وكأنك تحلل \vec{a} إلى مركبتين: الأولى: أفقية أو سينية هي \vec{a}_1 و

والثانية: رأسية أو صادية هي \vec{a}_2 و



أي أن $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$

حيث $\vec{a}_1 = (1, 0)$ و $\vec{a}_2 = (0, 1)$

كما في الشكل

يُسمى العددان \vec{a}_1 ، \vec{a}_2 مركبات المتجه \vec{a}

كما تسمى هذه العلاقة

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \quad \text{التمثيل الجبري للمتجه } \vec{a}$$

أو تجميعاً خطياً Linear Combination

وهو تمثيل بدلالة متجهي الوحدة \vec{e}_1 ، \vec{e}_2 وهو تمثيل وحيد كون \vec{e}_1 ، \vec{e}_2 تمثيل

$(1, 0)$ ، $(0, 1)$ وتمثل فقط.

وفي التمثيل الجبري للمتجهات في المستوى يمكن استنتاج الخواص التالية:

$$(1) \quad \vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \quad (\text{مُمثل جبرياً})$$

$$\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 \quad (\text{مُمثل جبرياً})$$

فإن $\vec{a} = \vec{b}$ إذا وفقط إذا كان $\vec{a}_1 = \vec{b}_1$

$$\vec{a}_2 = \vec{b}_2$$

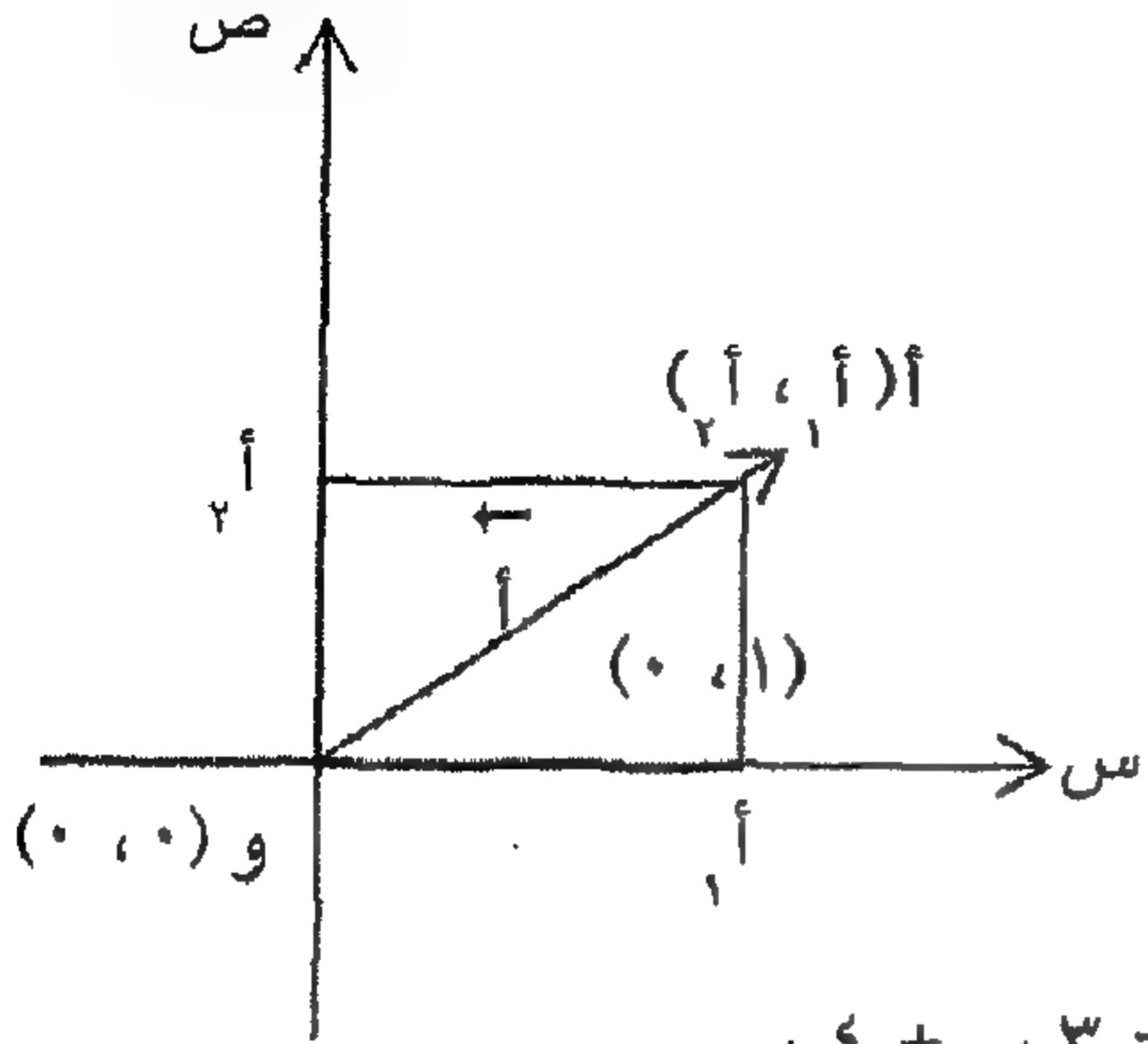
المتجهات

(٢) ومن قانون المسافة بين نقطتين في المستوى الديكارتي أو من نظرية

فيثاغورس فإن:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

حيث المثلث A_1 وقائم الزاوية في A_2



حيث $|\vec{A}|$ تسمى طول المتجه \vec{A}

مثال: ما قيمة $|\vec{A}|$ حيث $\vec{A} = \vec{A}_3 + \vec{A}_4$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_3^2 + A_4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

والآن سنناقش العمليات على المتجهات بطريقة جبرية هكذا:

$$(1) \quad \vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2)$$

«الجمع»

$$= (A_1 + B_1, A_2 + B_2)$$

$$= (A_1 + B_1, A_2 + B_2)$$

$$(2) \quad \vec{A} - \vec{B} = (A_1 - B_1, A_2 - B_2)$$

«الطرح»

$$= (A_1 - B_1, A_2 - B_2)$$

$$= (A_1 - B_1, A_2 - B_2)$$

$$(3) \quad m\vec{A} = (mA_1, mA_2)$$

«الضرب بعدد معين»

$$= (mA_1, mA_2)$$

مثال: إذا كان $\vec{A} = \vec{A}_3 - \vec{A}_2$

المتجهات



$$\vec{b} = -\vec{v}_6 + \vec{v}_7$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{v}_6 + \vec{v}_7, \quad \vec{a} - \vec{v}_6 + \vec{v}_7 = \vec{a} - \vec{v}_6 + \vec{v}_7$$

$$\text{أولاً: } \vec{a} + \vec{b} = (\vec{v}_3 - \vec{v}_2) + (-\vec{v}_6 + \vec{v}_7) = \vec{a} + \vec{b}$$

$$= (\vec{v}_3 - \vec{v}_6) + (-\vec{v}_2 + \vec{v}_7) =$$

$$= -\vec{v}_3 + \vec{v}_5$$

$$\text{ثانياً: } \vec{a} - \vec{b} = (\vec{v}_3 - \vec{v}_6) - (-\vec{v}_2 + \vec{v}_7) = \vec{a} - \vec{b}$$

$$= (\vec{v}_3 - \vec{v}_6) + (\vec{v}_2 - \vec{v}_7) =$$

$$= \vec{v}_3 - \vec{v}_9$$

$$\text{ثالثاً: } \vec{a} - \vec{b} = (\vec{v}_3 - \vec{v}_6) - (-\vec{v}_2 + \vec{v}_7) = \vec{a} - \vec{b}$$

$$= \vec{v}_3 - \vec{v}_9$$

$$\text{ويمكن الآن القول أن } \vec{a} - \vec{b} = (\vec{v}_3 - \vec{v}_6) - (-\vec{v}_2 + \vec{v}_7) = \vec{a} - \vec{b}$$

$$= (\vec{v}_3 - \vec{v}_6) + (\vec{v}_2 - \vec{v}_7) =$$

$$= (\vec{v}_3 - \vec{v}_6) + (\vec{v}_2 - \vec{v}_7) =$$

$$\text{مثال: إذا كان } \vec{a} \text{ متجه حيث } \vec{a} = \vec{v}_5 + \vec{v}_4$$

$$\vec{b} = \vec{v}_3 - \vec{v}_5$$

$$\text{فإن } \vec{a} - \vec{b} = (\vec{v}_5 + \vec{v}_4) - (\vec{v}_3 - \vec{v}_5) = \vec{a} - \vec{b}$$

المتجهات



$$= (٣ و١ - ٥ و١) + (- ٥ و٣ - ٤ و٣)$$

$$= - ٢ و١ - ٩ و٣$$

والآن يمكن القول أن عمليات الجمع والطرح والضرب بعدد حقيقي للمتجهات تتم وكأنها مقادير جبرية وهذا هو صلب مفهوم «جبر المتجهات».

$$\leftarrow \text{مثال: إذا كان } \vec{a} = ٥ و١ - ٣ و٣$$

$$\vec{b} = ١١ و١ + ٣ و٣$$

$$\vec{c} = - ٤ و١ + ٢ و٣$$

جد المتجه \vec{s} الذي يحقق المعادلة

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = ٢ \vec{c} - \vec{s}$$

$$\text{الحل} \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = ٢ \vec{c} - \vec{s}$$

$$\vec{s} + \vec{s}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + ٢ \vec{s} = ٢ \vec{c}$$

$$\vec{a} - \vec{b} - ٢ \vec{c} = - ٢ \vec{s}$$

$$٢ \vec{s} = \vec{a} - \vec{b} - ٢ \vec{c}$$

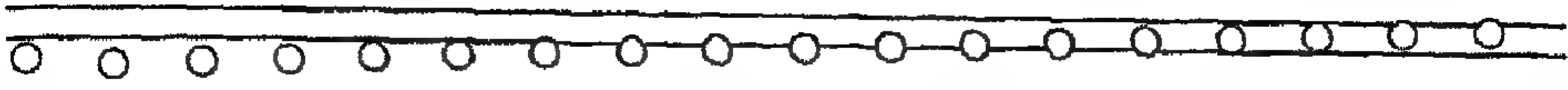
$$= (- ٤ و١ + ٢ و٣) - (١١ و١ + ٣ و٣) - (٥ و١ - ٣ و٣)$$

$$= - ٨ و١ + ٤ و٣ - ١١ و١ - ٣ و٣ + ٥ و١ - ٣ و٣$$

$$\therefore ٢ \vec{s} = - ٦ و١ + ٢٤ و٣$$

$$\therefore \vec{s} = - ٣ و١ + ١٢ و٣$$





(١٦ - ٢) العمليات الهندسية والجبرية على المتجهات في الفضاء

حتى نستطيع القيام بالعمليات الهندسية والجبرية على المتجهات في الفضاء
وجب أولاً أن نقدم نظاماً للإحداثيات ذات الثلاثة أبعاد، وهذا النظام يُعين النقط
بثلاثيات مرتبة من الأعداد الحقيقية مثل الثلاثي المرتب $(س، ر، ص)$ $(ع، ر)$ والذي
يمثل نقطة في الفضاء حيث:

مسقطها الأول السيني هو $س، ر، ص$ \exists $س$ محور السينات
ومسقطها الثاني الصادي هو $ص، ر، ع$ \exists $ص$ محور الصادات
ومسقطها الثالث العيني هو $ع، ر، س$ \exists $ع$ محور العينات
□ ملحوظة هامة جداً:

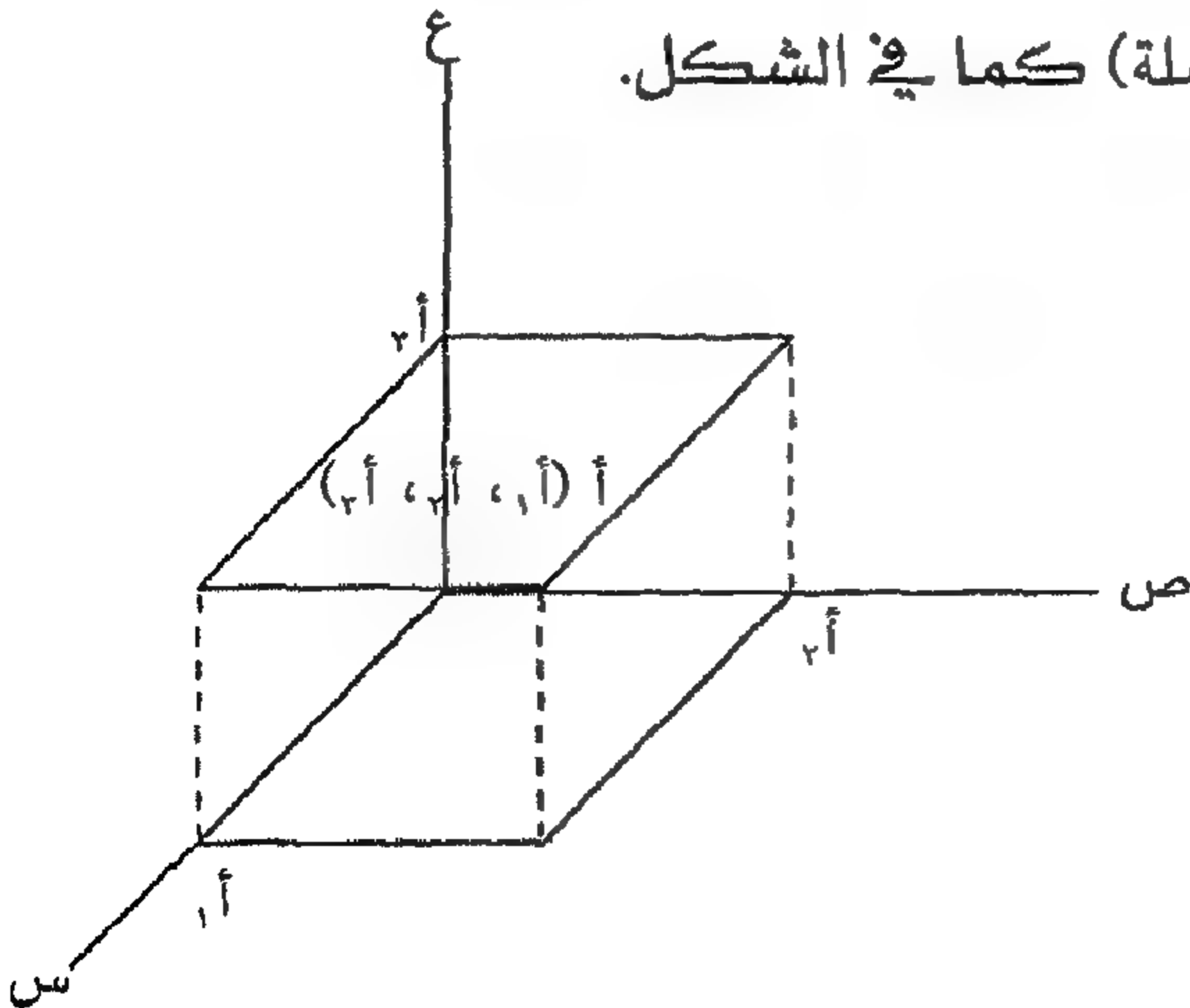
«ولسهولة فقط سوف نكتب هذه الثلاثيات باسم النقطة مثل $أ (أ١، أ٢، أ٣)$ ،
 $ب (ب١، ب٢، ب٣)$ ، ... إلخ»
ولتعيين النقطة في الفضاء:

نعين أولاً الإحداثي السيني لها ثم نعين الإحداثي الصادي لها ثم نكمل
متوازي الأضلاع في المستوى $س م ص$ وبعدها تقوم بإكمال متوازي المستطيلات
(بالخطوط المتقطعة، أو غير المتصلة) كما في الشكل.

لنعين $أ (أ١، أ٢، أ٣)$ هكذا ←

حيث تم تعيين النقطة

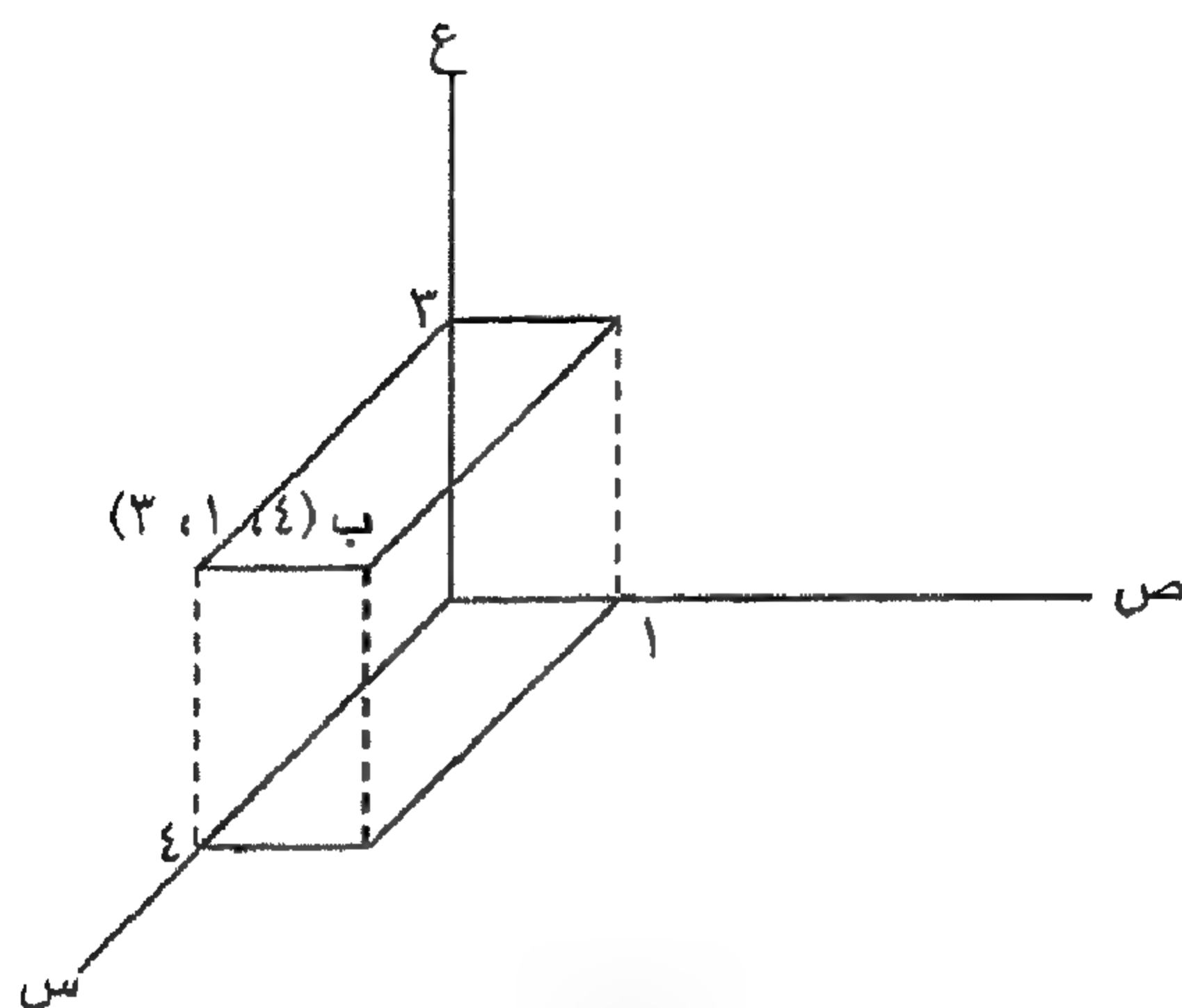
$أ (أ١، أ٢، أ٣)$



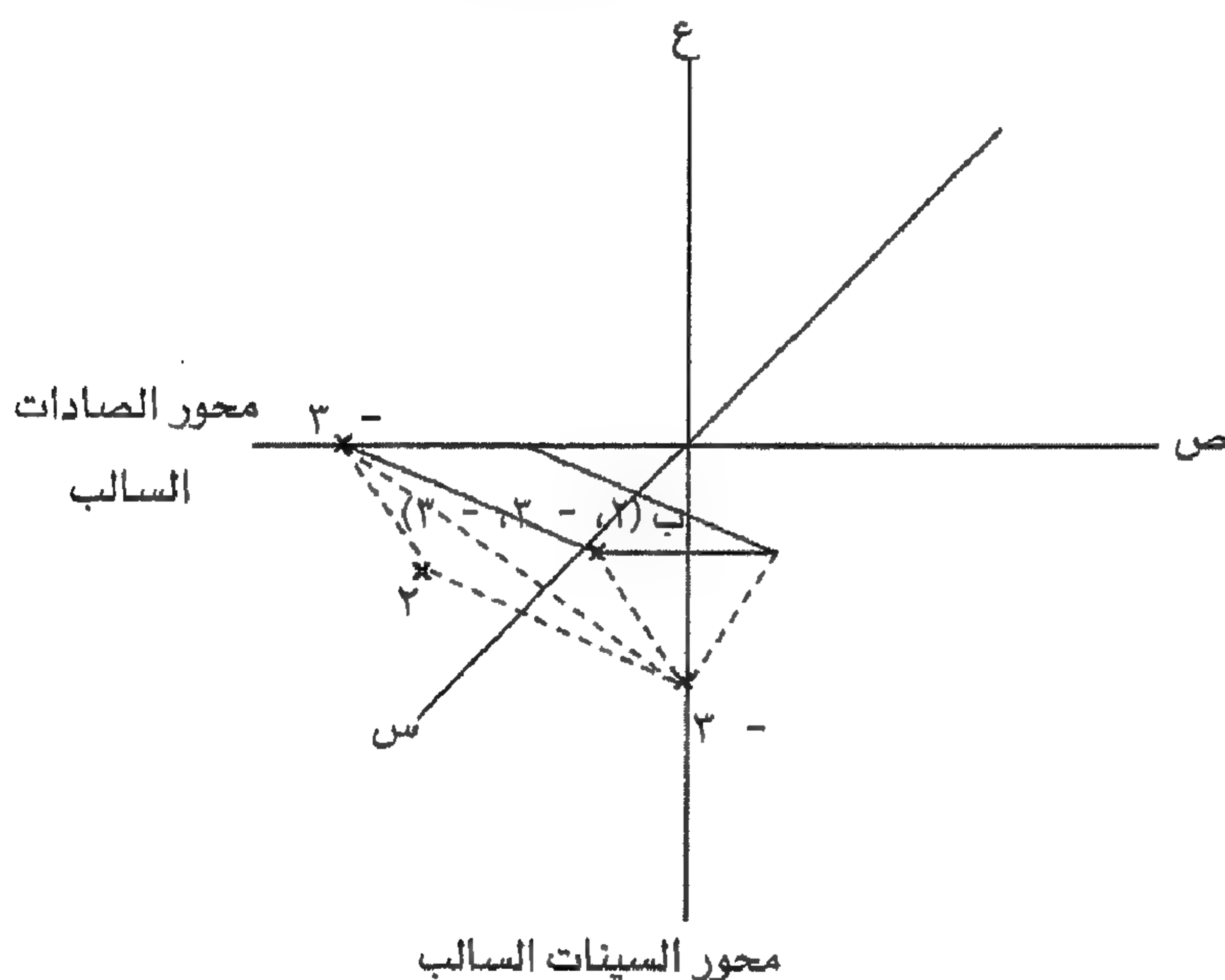
المتجهات



مثال: عين النقطة ب (٤ ، ١ ، ٣) في الفضاء



مثال: عين النقطة ج (٢ - ، ٣ - ، ٣ -) في الفضاء



ثم ثانياً علينا أن نعرض بإيجاز شديد بعض المفاهيم على شكل معادلات أو

قواعد أو قوانين كما يلي:

(١) المسافة بين نقطتين في الفضاء

إذا كانت أ (أ_١ ، أ_٢ ، أ_٣) ، ب (ب_١ ، ب_٢ ، ب_٣) نقطتان في الفضاء

المتجهات



$$\text{فإن } \overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

مثال: احسب المسافة بين النقطتين أ (٣، ١، -٢) ، ب (٤، ١، -٥)

$$\overline{AB} = \sqrt{(3 - 4)^2 + (1 - 1)^2 + (-2 - (-5))^2} = \sqrt{1 + 0 + 9} = \sqrt{10}$$

$$= \sqrt{10} \approx 3.16 \text{ تقريباً}$$

مثال: ما نوع المثلث الذي رؤوسه ل (١، ٢، ٣) ، م (٤، ١، ٣) ، ن (٤، ٦، ٤)

الحل: نجد أطوال أضلاعه ثم نقرر ما نوعه هكذا:

$$\overline{LM} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 1)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{9 + 1 + 0} = \sqrt{10}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{(4 - 4)^2 + (1 - 6)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{0 + 25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\overline{LN} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 6)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$$

فالمثلث متساوي الساقين وفيه $|LM| = |LN| = \sqrt{10}$ وحدة طول

(٢) قانون إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء

إذا كانت أ (١، ٢، ٣) ، ب (٤، ١، ٣) نقطتان في الفضاء

فإن إحداثيات النقطة ج منتصف القطعة المستقيمة \overline{AB} هي

$$ج \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

مثال: أوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

أ (-١، ٣، ١) ، ب (٣، ٤، -٢)

$$\text{الحل: ج} \left(\frac{-1 + 3}{2}, \frac{3 + 4}{2}, \frac{1 + (-2)}{2} \right)$$

$$= ج (١, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$$



المتجهات



(٣) معادلة الكرة:

تعرف الكرة بلغة المحل الهندسي بأنها: السطح الناتج عن حركة نقطة في الفضاء مثل Q حول نقطة ثابتة مثل M وعلى بعد ثابت منها R وحدة طول وفي جميع

الاتجاهات كما في الشكل

عندها تسمى النقطة الثانية

مركز الكرة ويسمى المقدار

الثابت R نصف قطر الكرة افرض

$Q (s, v, e)$ ، $M (a, b, c)$.

فمعادلة الكرة القياسية

تكون؛ وحسب قانون المسافة بين

نقطتين في الفضاء وهما:

$Q (s, v, e)$ ، المتحركة و $M (a, b, c)$ الثانية حيث $R = R$ هي:

$$R^2 = (s - a)^2 + (v - b)^2 + (e - c)^2$$

وبعد فك الأقواس وترتيب النواتج تصبح الصورة القياسية لمعادلة الكرة

كما يلي:

$$s^2 + v^2 + e^2 - 2as - 2bv - 2ce + a^2 + b^2 + c^2 = R^2$$

$$\therefore s^2 + v^2 + e^2 - 2as - 2bv - 2ce + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0$$

$$\text{وبعد فرض } l = -a, k = -b, h = -c$$

فإن

$$s^2 + v^2 + e^2 + 2ls + 2kv + 2he = R^2$$

المتجهات



لمعادلة الكرة حيث مركزها م (- ل، - ك، - هـ)

$$\sqrt{ل^2 + ك^2 + ه^2} = ر \quad \text{حيث ل، ك، هـ، ر ثوابت}$$

ويمكن تحويل الصورة العامة إلى صورة قياسية بواسطة إكمال المربعات؛

إذا كان مركز الكرة هو نقطة الأصل م (٠، ٠، ٠)

فإن معادلتها العامة:

$$س^2 + ص^2 + ع^2 = ر^2 \quad \text{حيث ر نصف قطرها وهي الصورة العامة والقياسية في نفس الوقت.}$$

مثال: أوجد معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٤ سم.

المعادلة العامة والصورة القياسية لمعادلة الدائرة هي:

$$س^2 + ص^2 + ع^2 = ر^2$$

$$\text{أي أن } س^2 + ص^2 + ع^2 = ٤^2$$

$$\text{ومنها } س^2 + ص^2 + ع^2 = ١٦$$

مثال: أوجد (أ) معادلة الكرة التي مركزها م (٥، -٣، ١) ونصف

قطرها ر = ١ سم.

(ب) أوجد مركز ونصف قطر الكرة التي معادلتها: $س^2 + ص^2 + ع^2 = ٦$

$$٦ = س^2 + ٨ = ص + ٤ = ع = صفر.$$

حل (أ): الصورة القياسية:

$$س^2 + (ص - ٣)^2 + (ع - ١)^2 = ١$$

$$س^2 + (ص - ٣)^2 + (ع - ١)^2 = ١ \quad \text{وهذه الصورة القياسية لمعادلة الكرة}$$



المتجهات



وبعد التبسيط

$$س^2 - ١٠س + ٢٥ + ص^2 + ٦ص + ٩ + ع^2 - ٢ع + ١ = ١$$

$$س^2 + ص^2 + ع^2 - ١٠س + ٦ص + ٢ع - ٣٤ = ٠ \text{ صفر وهذه المعادلة العامة للمكرة.}$$

حل (ب) المعادلة

$$س^2 + ص^2 + ع^2 - ١٠س + ٨ص + ٤ع - ٤ = ٠ \text{ صفر}$$

نحولها إلى الصورة القياسية بواسطة إكمال المربعات هكذا:

$$(س^2 - ١٠س + ٢٥) + (ص^2 + ٨ص + ١٦) + (ع^2 - ٢ع + ١) = ٤$$

وبإضافة مربع نصف معامل المتغير لكل طرف كما يلي:

$$(س^2 - ١٠س + ٢٥) + (ص^2 + ٨ص + ١٦) + (ع^2 - ٢ع + ١) = ٤ + ٢٥ + ١٦$$

$$٤ + ٢٥ + ١٦ + ٢٣ = ٢٢ + ٢٤ + ٢٣ + ٤ =$$

$$٢٥ = (س - ٥)^2 + (ص + ٤)^2 + (ع - ١)^2$$

مطابقتها بالصورة القياسية

$$س^2 + ص^2 + ع^2 - ١٠س + ٨ص + ٢ع - ٣٤ = ٠$$

$$\text{فالمركز م (٣، -٤، -٢)، نصف القطر ر = } \sqrt{٢٥} = ٥ \text{ سم}$$

والآن سنناقش جبر المتجهات في الفضاء

لتمثيل المتجهات في الفضاء يلزمنا متجهات الوحدة وهي ثلاث:

$$\vec{e}_1 = (١, ٠, ٠), \vec{e}_2 = (٠, ١, ٠), \vec{e}_3 = (٠, ٠, ١) \text{ وتمثل في الفضاء}$$

على نظام الإحداثيات ذي الثلاثة أبعاد كما في الشكل.

المتجهات



هذا وتشكل متجهات

الوحدة \vec{u}_1 ، \vec{u}_2 ، و \vec{u}_3 ما

يسمى أساس المتجهات في

الفضاء، والتفسير أن كل

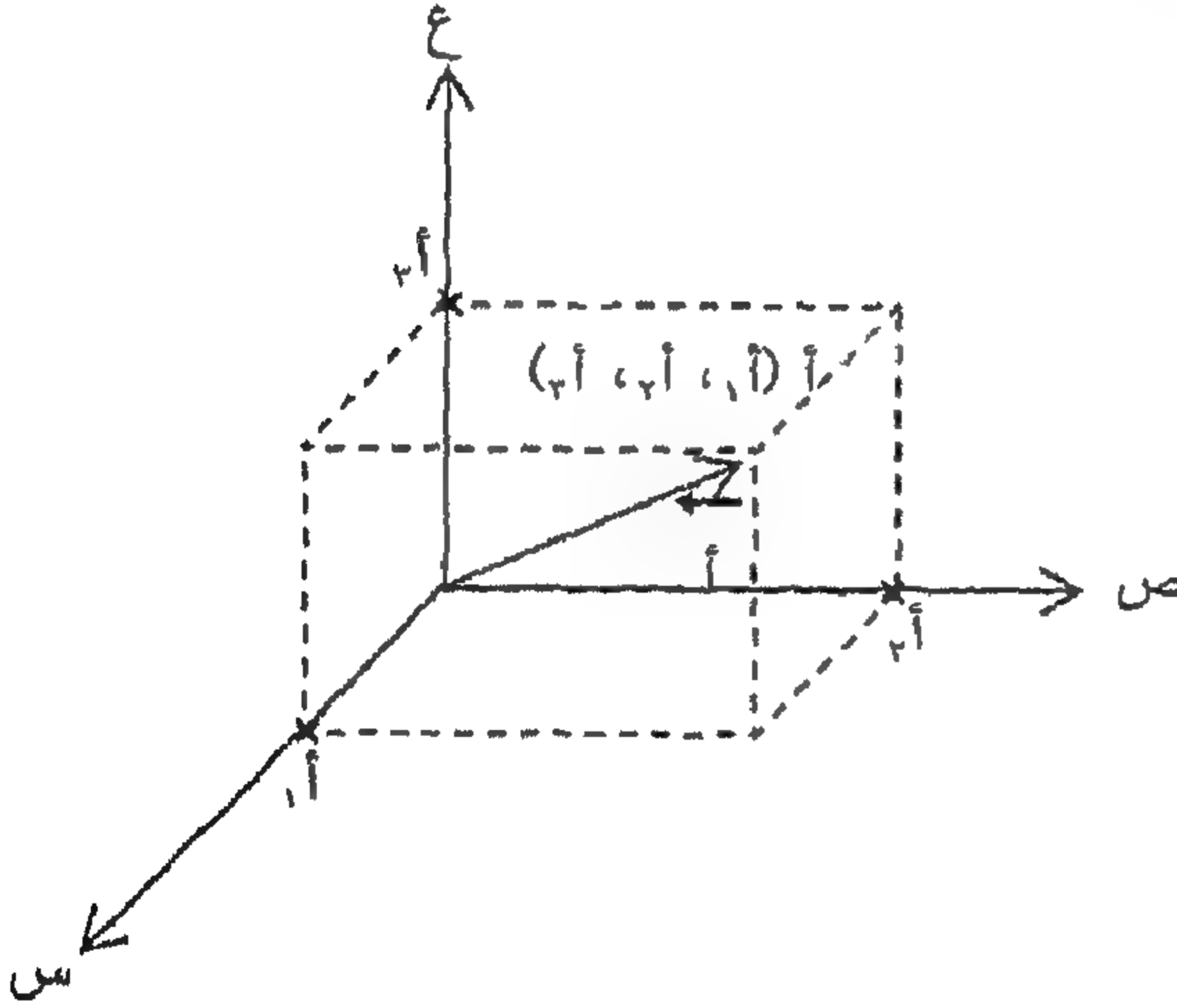
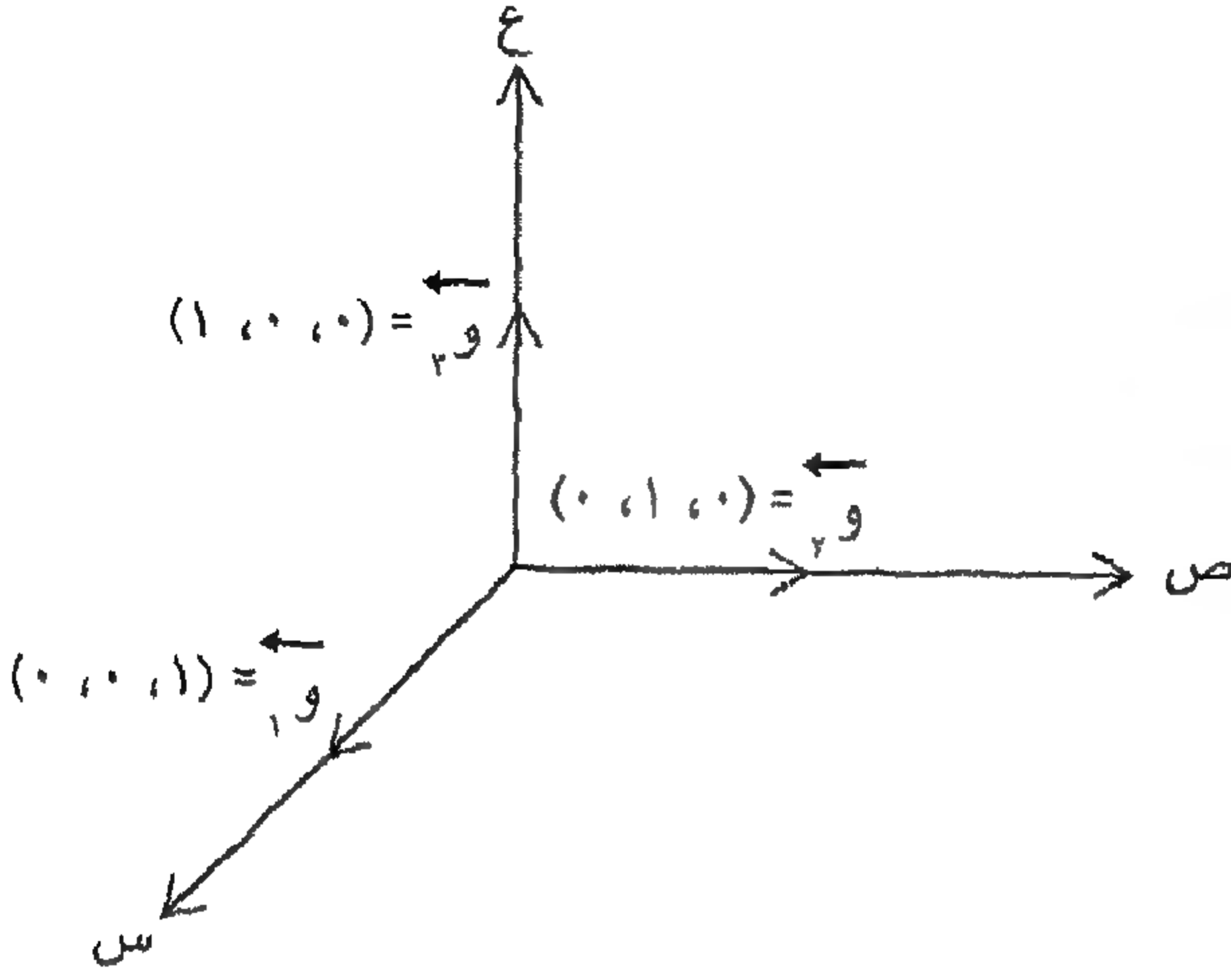
متجه في الفضاء مثل \vec{a} فإنه

يمثل بدلالة متجهات الوحدة

تلك وعلى الصورة $\vec{a} =$

$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$ حيث a_i

a_1 ، a_2 مركبات المتجه \vec{a} كما هو واضح بالشكل.



هذا وجميع المفاهيم والمصطلحات والقوانين والعمليات التي درست على

المتجهات في المستوى، نعمم الآن وبصورة مباشرة على المتجهات في الفضاء، كما

يلي:

إذا كان $\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$

$\vec{b} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3$

المتجهات



فإن:

$$(1) \quad \vec{a} = \vec{b} \text{ فقط إذا } a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$$

$$(2) \quad \text{طول المتجه } \vec{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\text{طول المتجه } \vec{b} = |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

(3) جمع المتجهات:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

(4) وكذلك طرح المتجهات:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$(5) \text{ وكذلك } m\vec{a} = (ma_1, ma_2, ma_3)$$

$$\text{الضرب بعدد معين وكذلك } m\vec{b} = (mb_1, mb_2, mb_3)$$

حيث m عدد حقيقي، أي $m \in \mathbb{R}$.

$$(6) \text{ إذا كان } \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\text{فإن } \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$



$$\vec{a} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \quad \text{مثال: إذا كان}$$

$$\vec{b} = \vec{u}_1^2 - \vec{u}_2^2 - \vec{u}_3^2$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_1^2 - \vec{u}_2^2 - \vec{u}_3^2 \quad \text{فإن}$$

$$= \vec{u}_1^3 - \vec{u}_2^3$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) - (\vec{u}_1^2 - \vec{u}_2^2 - \vec{u}_3^2) \quad \text{وكذلك}$$

$$= (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + (\vec{u}_2^2 + \vec{u}_3) + (\vec{u}_1^2 - \vec{u}_3) =$$

$$= -\vec{u}_1 + \vec{u}_2^3 + \vec{u}_3^2$$

$$\vec{a}^2 = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3)^2$$

$$= \vec{u}_1^2 + \vec{u}_2^2 + \vec{u}_3^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \approx 1.7 \quad \text{وكذلك}$$

$$\vec{a} = \vec{u}_1^4 + \vec{u}_2^5 - \vec{u}_3^5 \quad \text{مثال: إذا كان}$$

$$\vec{b} = -\vec{u}_1^3 + \vec{u}_2^4$$

$$\vec{c} = -\vec{u}_1^2$$

أوجد قيم الأعداد الحقيقية ل، م، ن علماً بأن:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{u}_3 \quad \vec{a} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

$$\vec{b} = -\vec{u}_1^3 + \vec{u}_2^4 + \vec{u}_3^4$$

المتجهات



$$ج = ٢ - ١ و$$

وبعد الترتيب: $ل و ٣ م و ١ = (ل - ٣ م) و$

$$- ٤ ل و ٣ م و ٢ - ١ = (- ٤ ل + ٣ م - ٢ و) و$$

$$٥ ل و = (٥) ل و$$

$$الطرف الأيسر و = (١, ٠, ٠)$$

$$أي أن ل - ٣ م = صفر$$

$$وكذلك - ٤ ل + ٣ م - ٢ و = صفر$$

$$وكذلك ٥ ل = ١$$

وبعد حل المعادلات فإن:

$$ل = \frac{1}{5}, م = \frac{1}{15}, و = \frac{4}{15}$$

$$أ = ٣ - و$$

$$ب = ٢ + ٥ و$$

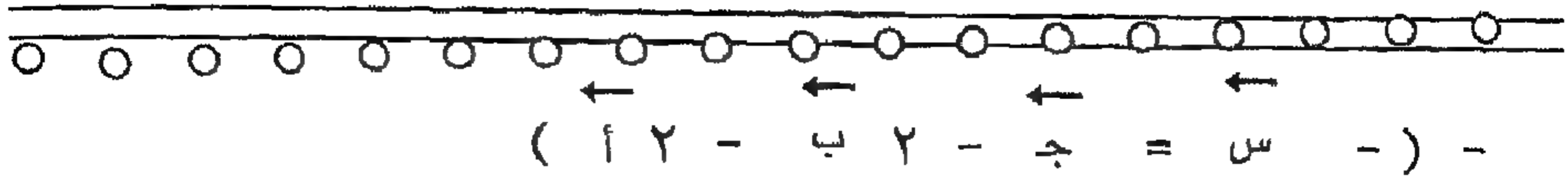
$$ج = ٣ - ٤ و$$

أوجد المتجه $س$ الذي يحقق المعادلة:

$$٢ أ + ٣ س = ج - ٢ ب + ٤ س$$

$$\begin{array}{r} ٢ أ - ٢ ب + ٤ س \\ \hline ٢ أ + ٣ س = ج - ٢ ب + ٤ س \\ \hline - ٤ س = - ٤ س \end{array}$$

المتجهات



$$\vec{س} = ٢\vec{أ} + ٢\vec{ب} + ٢\vec{ج}$$

$$= ٢(\vec{أ} - \vec{ب} - \vec{ج}) - (\vec{أ} + \vec{ب} + \vec{ج}) - (\vec{أ} - \vec{ب} - \vec{ج})$$

$$= ٢\vec{أ} - ٢\vec{ب} - ٢\vec{ج} - \vec{أ} - \vec{ب} - \vec{ج} - \vec{أ} + \vec{ب} + \vec{ج}$$

$$= ٢\vec{أ} - ٢\vec{ب} - ٢\vec{ج} - \vec{أ} - \vec{ب} - \vec{ج} - \vec{أ} + \vec{ب} + \vec{ج}$$

$$\therefore \vec{س} = ٢\vec{أ} - ٢\vec{ب} - ٢\vec{ج} - \vec{أ} - \vec{ب} - \vec{ج} - \vec{أ} + \vec{ب} + \vec{ج}$$

(١٦-٣) الضرب الداخلي Inner Product

ويسمى أحياناً الضرب النقطي Dot Product ويرمز له بالرمز $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$ ويعرف هكذا:

إن حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ هو العدد الحقيقي الناتج عن: $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = |\vec{أ}| |\vec{ب}| \cos \theta$ حيث θ هي الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين.

ويسمى بالضرب الداخلي لأنه لا ينتج متجهات من نفس نوع الكميات المضروبة بل أعداد حقيقية.

$$\text{مثال: إذا كان } |\vec{أ}| = ٦ ، |\vec{ب}| = ٥$$

والزاوية θ بين المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، تساوي ١٢٠° فإن:

$$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = (٦) (٥) \cos ١٢٠^\circ = (٦) (٥) \left(-\frac{1}{2}\right) = -١٥$$

$$\text{«لأن جتا } ١٢٠^\circ = \cos(١٨٠ - ٦٠) = -\cos ٦٠^\circ = -\frac{1}{2} \text{»}$$

المتجهات



أي أن حاصل الضرب الداخلي $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$ وهذا عدد حقيقي ومن

هذا التعريف يمكن استنتاج أن:

$$(1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{الخاصية التبادلية}$$

$$(2) \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad \text{لأن الزاوية بين المتجه } \vec{a} \text{ ونفسه تساوي}$$

صفرًا وجتا صفر = 1

(3) إذا كان م عدداً حقيقياً فإن:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot m = (\vec{a} \cdot (m \cdot \vec{b})) = m \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(4) \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad \text{الخاصية التوزيعية}$$

$$(5) \quad \text{إذا كان } \vec{a} \neq \text{صفر} , \vec{b} \neq \text{صفر} \text{ فإن}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{صفر إذا وفقط إذا كان } \vec{a} \text{ يعامد } \vec{b}$$

كون الزاوية $\frac{\pi}{2}$

$$\text{أي أن } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

صفر =

مثال: احسب حاصل الضرب الداخلي لكل متجهين من متجهات الوحدة

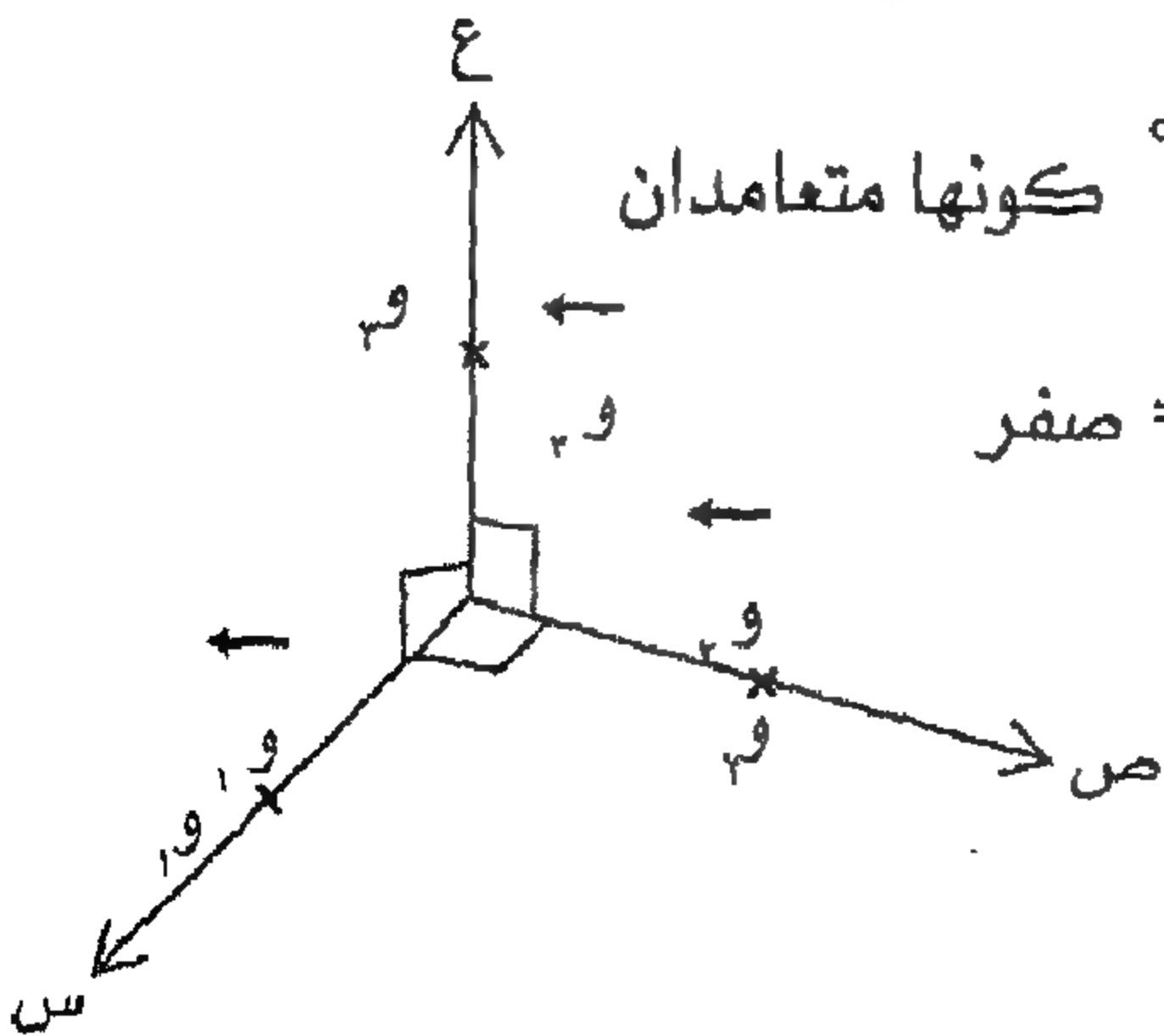
وكذلك كل قيمة بنفسه:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| |\vec{u}| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$



المتجهات



كون الزاوية بين كل اثنين منها تساوي 90° كما في الشكل

$$\text{لكن } \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_3 = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_4 = \dots = 0 \text{ جتا صفر} = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_n$$

$$\text{لكن } |\vec{w}_1| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + \dots + 0^2} = 1 \text{ وهكذا طول كل المتجهات}$$

الوحدة.

$$|\vec{w}_1| = 1, |\vec{w}_2| = 1, |\vec{w}_3| = 1, \dots, |\vec{w}_n| = 1$$

وهذا المثال يعطي النتيجة التالية وبشكل عام:

إن حاصل ضرب أي متجهين من متجهات الوحدة = صفر

وإن حاصل ضرب أي متجه من متجهات الوحدة بنفسه = 1

$$\text{وبالرموز: } \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_3 = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_4 = \dots = \text{صفر}$$

$$\text{ولكن: } \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1 = \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2 = \vec{w}_3 \cdot \vec{w}_3 = \dots = 1$$

وهناك صيغة أخرى للضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء بدلالة مركباتهما

كما يلي:

$$\text{إذا كان } \vec{a} = a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2 + a_3 \vec{w}_3 + \dots + a_n \vec{w}_n$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{w}_1 + b_2 \vec{w}_2 + b_3 \vec{w}_3 + \dots + b_n \vec{w}_n$$

$$\text{فإن } \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2 + a_3 \vec{w}_3 + \dots + a_n \vec{w}_n) \cdot (b_1 \vec{w}_1 + b_2 \vec{w}_2 + b_3 \vec{w}_3 + \dots + b_n \vec{w}_n)$$

وبعد الضرب والتجميع مع اعتبار أن $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1 = \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2 = \vec{w}_3 \cdot \vec{w}_3 = \dots = 1$

وكذلك $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_3 = \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_3 = \dots = \text{صفر كما أعلاه ينتج أن:}$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n = \text{عدد حقيقي وليس متجهاً}$$

المتجهات



مثال: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3$

$\vec{b} = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_5$

فإن $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3) \cdot (-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_5) = (1)(-1) + (2)(1) + (-3)(0) = -1 + 2 = 1$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

والآن جاء الوقت لربط قاعدتي الضرب الداخلي مع بعضها البعض:

بما أن $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 + \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3$ كما مر سابقاً

وإن $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 + \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3$ كما مر سابقاً أيضاً.

فإن $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 + \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3$ جتاه

ومنها: جتاه $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 + \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3$

$$\frac{(1)(-1) + (2)(1) + (-3)(0)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \times \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{14} \times \sqrt{2}} =$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{14} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{28}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

كون $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 + \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3$

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو:

ماذا يستفاد من معرفة قياس الزاوية بين متجهين مثل \vec{a} ، \vec{b} على

سبيل المثال ؟

والجواب باختصار هو نستطيع معرفة قيمها إذا كان المتجهان متوازيين أو

المتجهات



متعامدين، وهكذا:

أولاً: إذا كان قياس الزاوية هـ بين المتجهين \vec{a} ، \vec{b} يساوي صفراً أو 180° فالمتجهين متوازيين.

أي عندما ينتج أن جتا هـ $= \pm 1$

كون جتا صفر $= 1$ ، وكون جتا $180^\circ = -1$

أي أن شرط توازي المتجهين هو جتا هـ $= \pm 1$

ثانياً: إذا كان قياس الزاوية هـ بين المتجهين \vec{a} ، \vec{b} يساوي 90° فالمتجهين متعامدين.

كون جتا $90^\circ =$ صفر

أي أن شرط تعامد المتجهات هو $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ صفر

$$\text{لأن جتا هـ} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\text{صفر}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \text{صفر}$$

كمثال: إذا كان $|\vec{a}| = 8$ ، $|\vec{b}| = 12$ وقياس الزاوية هـ المحصورة بين المتجهين \vec{a} ، \vec{b} يساوي 45° احسب $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\text{الحل: بما أن جتا هـ} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\text{فإن جتا } 45^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{8 \times 12}$$

$$\text{أي أن } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{12 \times 8}$$



المتجهات

$$\frac{\sqrt{2} \cdot 96}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{96}{\sqrt{2}} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

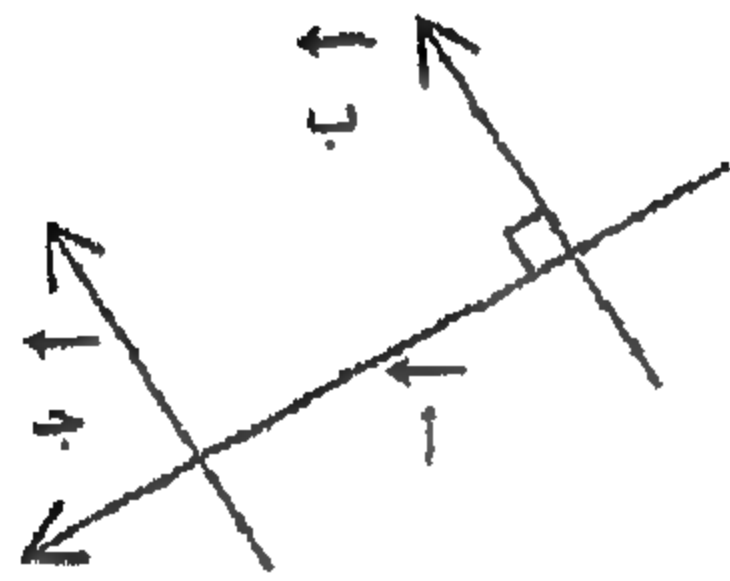
وبالضرب التبادلي:

$$\sqrt{2} \cdot 48 = \text{كعدد حقيقي}$$

مثال: جد قيم s ، v بحيث يكون المتجه $\vec{a} = s\vec{u}_1 + v\vec{u}_2$

$$\text{عمودياً على كل من المتجهين } \vec{b} = \vec{u}_3 + \vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

$$\vec{c} = -\vec{u}_3 + \vec{u}_2 + \vec{u}_1$$



لنأخذ المتجهين \vec{a} ، \vec{b} متعامدان

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \text{صفر}$$

$$\text{أي أن } 3s + v - 1 = 0 \quad \text{صفر}$$

$$\text{أو } 3s + v = 1 \quad \text{معادلة (1)}$$

ولنأخذ المتجهين \vec{a} ، \vec{c} متعامدان

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{c} = \text{صفر}$$

$$\text{أي أن } (-3)s + 2v + 1 = 0 \quad \text{صفر}$$

$$\text{أي أن } -3s + 2v = -1 \quad \text{معادلة (2)}$$

وبحل المعادلتين:

$$\text{(1)} \quad 3s + v = 1$$

$$\text{(2)} \quad -3s + 2v = -1$$

$$3s = 1$$

$$s = \frac{1}{3}$$



وبالتعويض:

$$1 = \left(\frac{1}{3} \right) + 3s$$

$$3s = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

وبالضرب التبادلي: $9s = 2$

$$s = \frac{2}{9}$$

$$s = \frac{2}{9}, \quad v = -\frac{1}{3}$$

(١٦ - ٤) الضرب المتجهي Vector Product

ويسمى الضرب التقاطعي Cross Product ويرمز له بالرمز $\vec{a} \times \vec{b}$

ويعرف هكذا:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

وباستخدام المحددات Determinants

فإن الضرب المتجهي للمتجهين $\vec{a} \times \vec{b}$ يعطى بالقاعدة:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

المتجهات



$$= \mathbf{w}_1 (\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2) - \mathbf{w}_2 (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) + \mathbf{w}_3 (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1)$$

ويسمى باسم الضرب المتجهي لأنه ينتج متجه بدلالة متجهات الوحدة ولا يُنصح بحفظ النتيجة لأن طريقة الحل واضحة.

$$\leftarrow \mathbf{a} \text{ إذا كان } \mathbf{w}_1 = 2, \mathbf{w}_2 = 6, \mathbf{w}_3 = 1$$

$$\leftarrow \mathbf{b} = -\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & -3 \end{array} \right| = \leftarrow \mathbf{a} \times \leftarrow \mathbf{b}$$

$$= \mathbf{w}_1 \left| \begin{array}{cc} 1 & -6 \\ 5 & -3 \end{array} \right| - \mathbf{w}_2 \left| \begin{array}{cc} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{array} \right| + \mathbf{w}_3 \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{array} \right|$$

$$= \mathbf{w}_1 (-1 - 30) - \mathbf{w}_2 (2 + 18) + \mathbf{w}_3 (10 - 3)$$

$$= -\mathbf{w}_1 31 - \mathbf{w}_2 20 + \mathbf{w}_3 7 \text{ وهذا عدد حقيقي.}$$

مثال: احسب $\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$ ، $\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3$ ، $\mathbf{w}_3 \times \mathbf{w}_1$ (حاصل ضرب متجهين) ثم

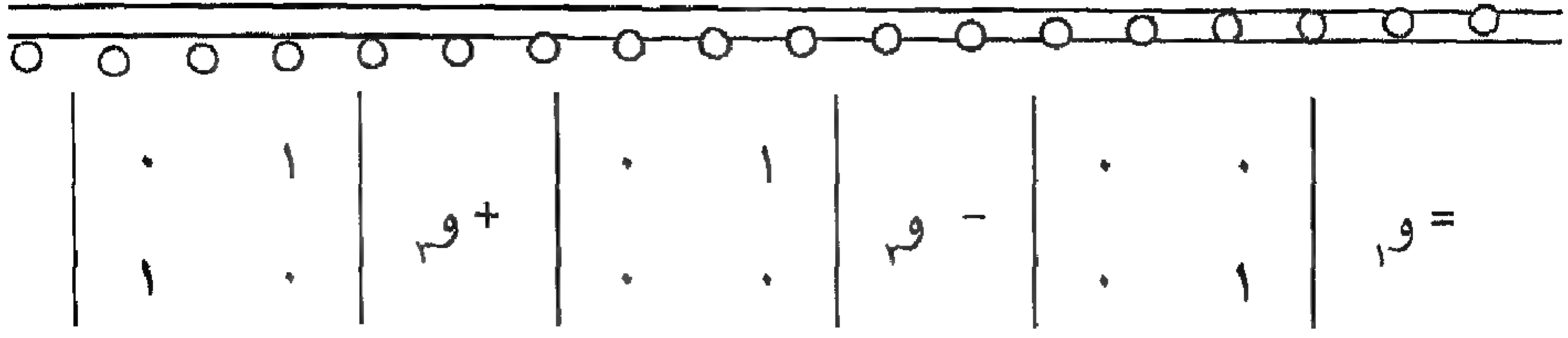
احسب $\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_1$ ، $\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_2$ ، $\mathbf{w}_3 \times \mathbf{w}_3$ (حاصل ضرب المتجه في نفسه).

$$\text{حيث } \mathbf{w}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{w}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{w}_3 = (0, 0, 1)$$

الحل:

$$\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right|$$

المتجهات



$$= \text{و} (\text{صفر}) - \text{و} (\text{صفر}) + \text{و} (١) = \text{و}$$

$$\text{وكذلك } \text{و} \times \text{و} = \text{و} , \text{ وكذلك } \text{و} \times \text{و} = \text{و}$$

$$\text{لكن } \text{و} \times \text{و} = - \text{و} , \text{ وكذلك } \text{و} \times \text{و} = - \text{و} , \text{ وكذلك } \text{و} \times \text{و} = - \text{و}$$

$$\text{لكن } \text{و} \times \text{و} = \begin{vmatrix} \text{و} & \text{و} & \text{و} \\ \cdot & \cdot & ١ \\ \cdot & \cdot & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cdot & ١ \\ \cdot & ١ \end{vmatrix} \text{و}^+ \begin{vmatrix} \cdot & ١ \\ \cdot & ١ \end{vmatrix} \text{و}^- \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \text{و} =$$

$$= \text{و} (\text{صفر}) - \text{و} (\text{صفر}) + \text{و} (\text{صفر}) = \text{صفر}$$

$$\text{وكذلك } \text{و} \times \text{و} = \text{صفر} , \text{ و } \text{و} \times \text{و} = \text{صفر}$$

وباختصار:

«الضرب المتجهي لمتجهين من متجهات الوحدة = \pm المتجه الثالث، والضرب

المتجهي لمتجه في نفسه = صفر»

وللضرب المتجهي الخصائص التالية:

□ للمتجهات \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \exists ح فإن:

ليس تبديلي

$$(1) \quad \vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$$

$$(2) \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

توزيعي

المتجهات



(٣) لكل \vec{a} \exists ح فإن :

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})) = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c})$$

$$(٤) \vec{a} \times \vec{a} = \text{صفر}$$

■ أما طول المتجه $\vec{a} \times \vec{b}$ والذي يرمز له بالرمز $|\vec{a} \times \vec{b}|$

وعلامته بكل من المتجهين \vec{a} ، \vec{b} فتحدده العلاقة التالية:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

المتجهين \vec{a} ، \vec{b} حيث θ هي الزاوية المحصورة بين

مثال: إذا كان $\vec{a} = \vec{i}$ ، $\vec{b} = \vec{j}$ وكانت الزاوية بين

المتجهين \vec{a} ، \vec{b} 90° احسب طول المتجه $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

الحل بطريقتين: الأولى:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$= \vec{i}(0 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - \vec{j}(1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) + \vec{k}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0)$$

$$= \vec{k}$$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$= \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

الثانية: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ حيث θ هي الزاوية بين

$$= \left(\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \right) \left(\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \right) \sin 90^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} =$$

$$\sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1} \times 1 =$$

إن شرط توازي المتجهين \vec{a} ، \vec{b} هو $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ = صفر

حيث $\begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{ب} & \text{ا} \end{vmatrix} = \text{جاصفر} = \begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{ب} & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{ب} & \times \end{vmatrix}$ صفر

== صفر

أى عندما تكون الزاوية هـ بين المتجهين صفر ، π ، 180°

وبالرموز

$\overleftarrow{a} // \overleftarrow{b}$ إذا وفقط إذا $\overleftarrow{a} * \overleftarrow{b} = \text{صفر شرط } \overleftarrow{a} \neq \text{صفر، } \overleftarrow{b} \neq$

صفر ويتحقق ذلك عندما تكون الزاوية بين المتجهين $\{ \text{صفر}^\circ, 180^\circ \}$.

ولا تنس شرط التعامد بالرموز.

أ ← ب ← إذا فقط إذا كان أ ← ب = صفر

ملحوظة مهمة جداً:

ضرب متجهی (تقاطعی). $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ صفر

ضرب داخلی (نقطی). $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

◀ مثال: احسب قياس الزاوية هـ المحصورة بين المتجهين

$$2 - 6 + 3 = 1$$

ب = ۴ و

المتجهات



الحل بطريقتين:

الأولى: جتاه = $\frac{\begin{array}{c} \leftarrow \quad \leftarrow \\ \text{ب} \quad \cdot \quad \text{أ} \\ \hline \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \\ \text{ب} \quad \text{ب} \quad \text{ب} \quad \text{ب} \end{array}}{\text{الضرب الداخلي}}$

جتاه = $\frac{\text{أ, ب, أ} + \text{أ, ب, ب} + \text{أ, ب, ب}}{(\sqrt{16}) \times (\sqrt{9 + 36 + 4})} = \frac{\text{صفر} + 24 + \text{صفر}}{4 \times 7}$

$0.8571 = \frac{6}{7} = \frac{24}{28} =$

$\therefore \nabla \text{ هـ} = 31^\circ$ تقريباً.

الثانية: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ | جاه الضرب المتجهي فإن:

جاه = $\frac{\begin{array}{c} \leftarrow \quad \leftarrow \\ \text{ب} \quad \times \quad \text{أ} \\ \hline \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \\ \text{ب} \quad \text{ب} \quad \text{ب} \quad \text{ب} \end{array}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

نجد أولاً $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

$= \vec{i}(0 - 8) - \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(0 - 8) = -8\vec{i} - 8\vec{k}$

$12\vec{i} - 8\vec{j}$

ومنه $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} = 11.31$

أي أن جاه = $\frac{\sqrt{128}}{(\sqrt{16}) \times (\sqrt{49})} = \frac{\sqrt{128}}{4 \times 7} = \frac{\sqrt{128}}{28}$

$\frac{\sqrt{52}}{14} = \frac{\sqrt{52} \cdot 2}{4 \times 7} = \frac{\sqrt{208}}{4 \times 7} = \frac{\sqrt{208}}{28} =$

$0.5101 = \frac{7.211}{14} =$



المتجهات

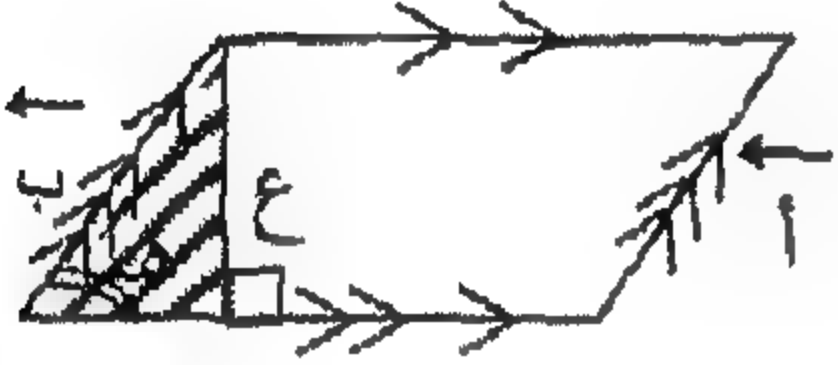


∴ $\angle h = 31^\circ$ تقريباً.

فالزاوية بين المتجهين \vec{a} ، \vec{b} هي 31° بعد الحل بطريقتين.

ومن أشهر التطبيقات الهندسية على الضرب المتجهي هو إيجاد مساحة متوازي أضلاع ومساحة مثلث في الفضاء وبلا مقدمات يمكننا التفسير كما يلي:

ليكن \vec{a} ، \vec{b} متجهين في الفضاء ولتكن الزاوية المحصورة بينهما هي الزاوية h ، تكون متوازي الأضلاع على أن يكون \vec{a} ، \vec{b} ممثلين لضلعين متجاورين فيه كما في الشكل.



وبما أن مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة \times الارتفاع (هندسة مستوية)

فإن مساحة متوازي الأضلاع = $|\vec{a}| \times |\vec{c}|$ (حيث c الارتفاع)

ولما كان $h = \frac{c}{|\vec{b}|}$ (المقابل الوتر في المثلث القائم الزاوية)

وبالضرب التبادلي $c = |\vec{b}| \cdot h$. جاه

فإن مساحة متوازي الأضلاع = $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot h$. جاه

لكن $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot h = |\vec{a}| \times |\vec{b}|$ كما مر سابقاً

فإن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه \vec{a} ، \vec{b} كضلعين متجاورين

$$= |\vec{a} \times \vec{b}|$$

مثال: أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاها المتجهان \vec{a} ، \vec{b}

حيث $\vec{a} = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ ، $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$

مساحة متوازي الأضلاع = $|\vec{a} \times \vec{b}|$

المتجهات

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥	٤٦	٤٧	٤٨	٤٩	٥٠	٥١	٥٢	٥٣	٥٤	٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠	٦١	٦٢	٦٣	٦٤	٦٥	٦٦	٦٧	٦٨	٦٩	٧٠	٧١	٧٢	٧٣	٧٤	٧٥	٧٦	٧٧	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	١٠٠
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

$$= = \text{و} (\text{صفر}) - \text{و} (-) + (٢١) \text{و} = ٧ \text{و} + ٢١ \text{و}$$

$$\text{وبما أن } | \vec{a} \times \vec{b} | = \sqrt{2(21) + 2(7)} = \text{(طول المتجه)}$$

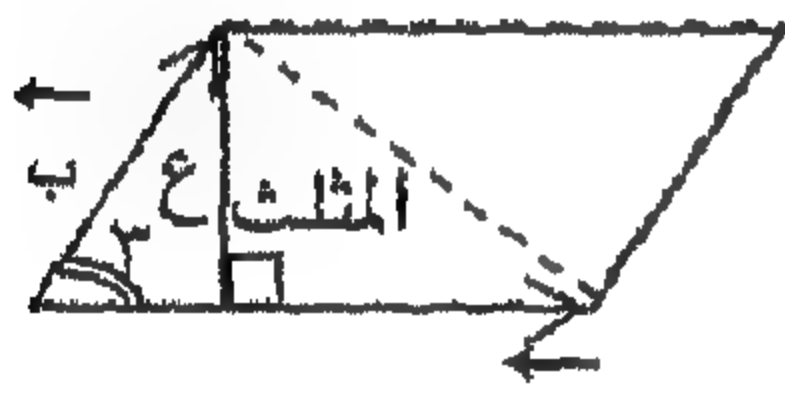
$$10 \cdot 7 = \sqrt{490} = \sqrt{441 + 49} =$$

$$22,134 = (3,162) 7 =$$

∴ مساحة متوازي الأضلاع = 22,134 سم²

وليس هذا فحسب بل يمكن إيجاد مساحة المثلث الذي فيه المتجهات \vec{a} ، \vec{b} كضلعين متجاورين، وحيث أن مساحة المثلث = نصف مساحة متوازي

الأضلاع اللذان لهما نفس القاعدة.



« \vec{a} » والارتفاع «ع»

فإن مساحة المثلث = $\frac{1}{2} | \vec{a} \times \vec{b} |$ الذي فيه \vec{a} ، \vec{b} يمثلان أي

$$\text{ضلعين أي أن مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times 22,134 = 11,067 \text{ سم}^2$$

يمكن إيجاد مساحة المثلث مباشرة كونها = $\frac{1}{2} | \vec{a} \times \vec{b} |$ دون

إيجاد مساحة متوازي الأضلاع أولاً.

وبشكل عام يمكن إيجاد مساحة المثلث أو متوازي الأضلاع إذا علمت

رؤوس كل منها كما في المثالين التاليين:

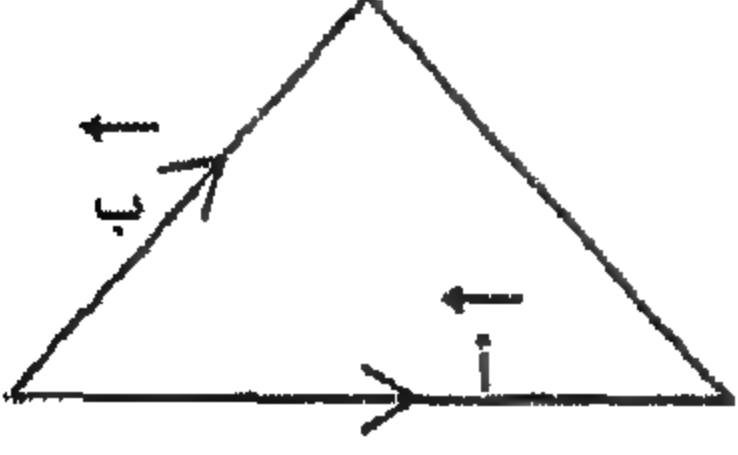
مثال ١: احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط التالية في الفضاء:

$$A(1, 3, 4), B(6, -4, 7), C(2, 2, 1)$$

المتجهات



الحل: تكون من الضلعين المتجاورين ر ك، ر ؟ $(1, 3, -4)$ ؟



المتجهين أ ، ب حيث

$$\vec{a} = \vec{r} = \vec{r} - \vec{k}$$

ر $(2, 2, 1)$

ك $(7, 4, 6)$

(نحول النقط إلى متجهات بدلالة متجهات الوحدة)

$$= (6 - 4 + 7) - (1 + 2 + 2) =$$

$$= 5 - 5 = 0$$

$$\text{وكذلك } \vec{b} = \vec{r} = \vec{r} - \vec{k} = (4 - 3 + 1) - (2 + 1) =$$

$$= (2 + 3 - 5) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

ومنها نجد $\vec{a} \times \vec{b} =$

$$= (25 + 6) - (25 - 5) + (18 - 25) =$$

$$= 31 - 20 + 7 =$$

$$\sqrt{31^2 + 20^2 + 7^2} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$= \sqrt{961 + 400 + 49} = \sqrt{1410} \approx 37.6 \text{ تقريباً}$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث } K = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) (37.6) = 18.8 \text{ سم}^2$$



المتجهات



مثال ٢: احسب مساحة متوازي الأضلاع الذي رؤوسه النقاط التالية في

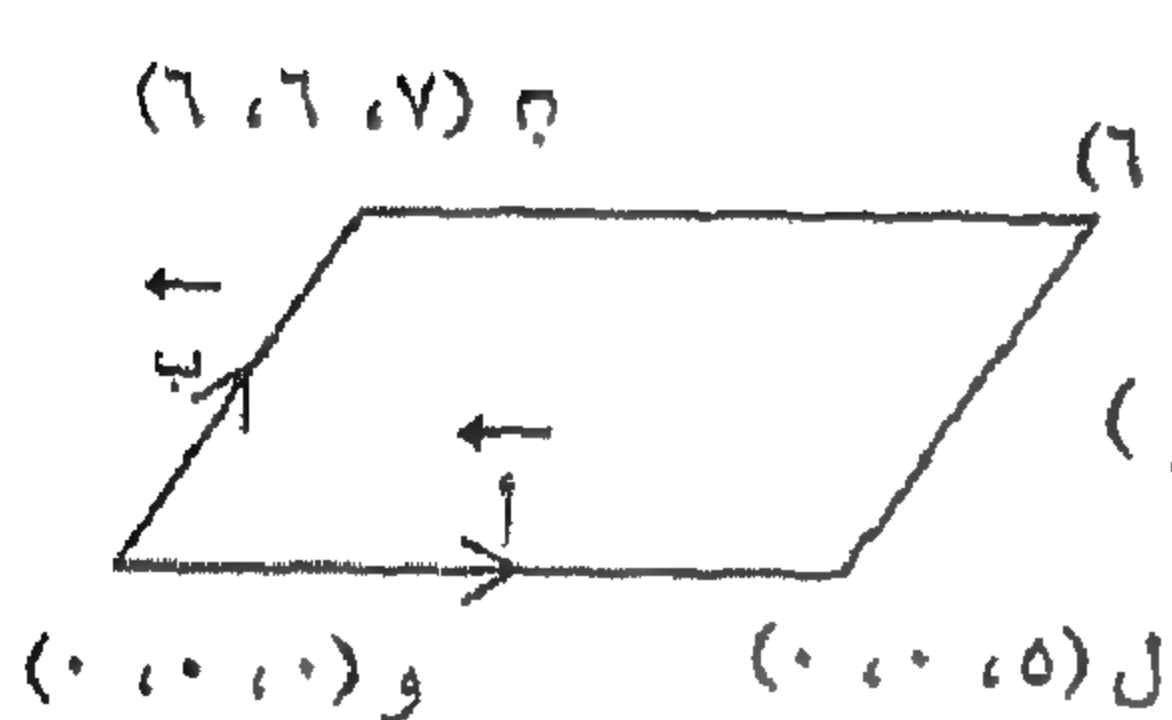
القضاء.

ل (٥، ٠، ٠)، م (٢، ٦، ٦)، ن (٧، ٦، ٦) نقطة الأصل و (٠، ٠، ٠)

نكون المتجهين \vec{a} ، \vec{b} كما يلي

$$\vec{a} = \vec{m} - \vec{l} = (2, 6, 6) - (5, 0, 0) = (-3, 6, 6)$$

$$\vec{b} = \vec{n} - \vec{l} = (7, 6, 6) - (0, 0, 0) = (7, 6, 6)$$



$$\vec{b} = \vec{n} - \vec{m} = (7, 6, 6) - (2, 6, 6) = (5, 0, 0)$$

$$\vec{a} = \vec{m} - \vec{l} = (2, 6, 6) - (5, 0, 0) = (-3, 6, 6)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 6 & 6 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(6 \cdot 0 - 6 \cdot 0) - \vec{j}(0 - 30) + \vec{k}(0 - 30) = 0\vec{i} + 30\vec{j} - 30\vec{k}$$

$$= 0\vec{i} + 30\vec{j} - 30\vec{k}$$

$$= 0\vec{i} + 30\vec{j} - 30\vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 30^2 + (-30)^2} = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2}$$

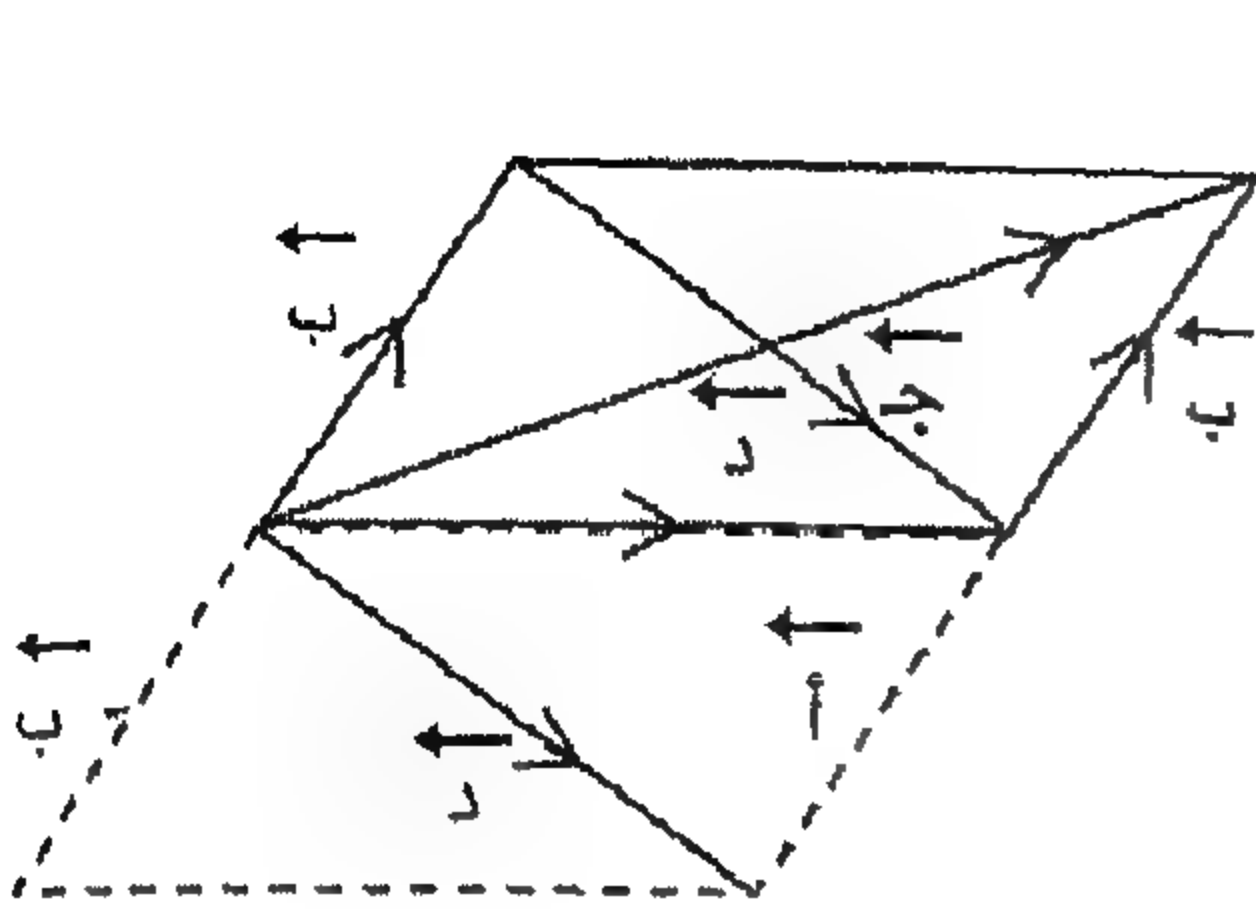
$$= 30\sqrt{2} = 42.42 \text{ سم}^2$$

مساحة متوازي الأضلاع





مثال: متوازي أضلاع قطراه ممثلان بالمتجهين



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

احسب مساحته:

نحسب أولاً \vec{a} ، \vec{b} :

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \quad \text{(قاعدة متوازي الأضلاع لجمع المتجهات)}$$

$$\text{أي أن } \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \quad (1)$$

$$\text{وكذلك } \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \quad \text{(قاعدة متوازي الأضلاع لجمع المتجهات)}$$

(- \vec{b} ، \vec{a}) كما في الشكل.

$$\therefore \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \quad (2)$$

وبحل المعادلتين بالحذف هكذا

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

$$2\vec{a} = \vec{c} + \vec{d} + 2\vec{b}$$

$$\text{ومنها } \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\text{لكن } \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

وبالتعويض:

المتجهات

$$\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{5}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\therefore \vec{b} = -\frac{2}{2}\vec{e}_1 + \frac{2}{2}\vec{e}_2 - \frac{3}{2}\vec{e}_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 \left(-\frac{15}{4} - \frac{3}{2} \right) - \vec{e}_2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) + \vec{e}_3 \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \right)$$

$$= \vec{e}_1 \left(-\frac{18}{4} \right) - \vec{e}_2 \left(\frac{2}{2} \right) + \vec{e}_3 \left(\frac{6}{2} \right)$$

$$= -\frac{9}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\left(\frac{81}{4}\right) + 1 + 9} = \sqrt{\frac{109}{4}} = \frac{\sqrt{109}}{2} \approx 5.22$$

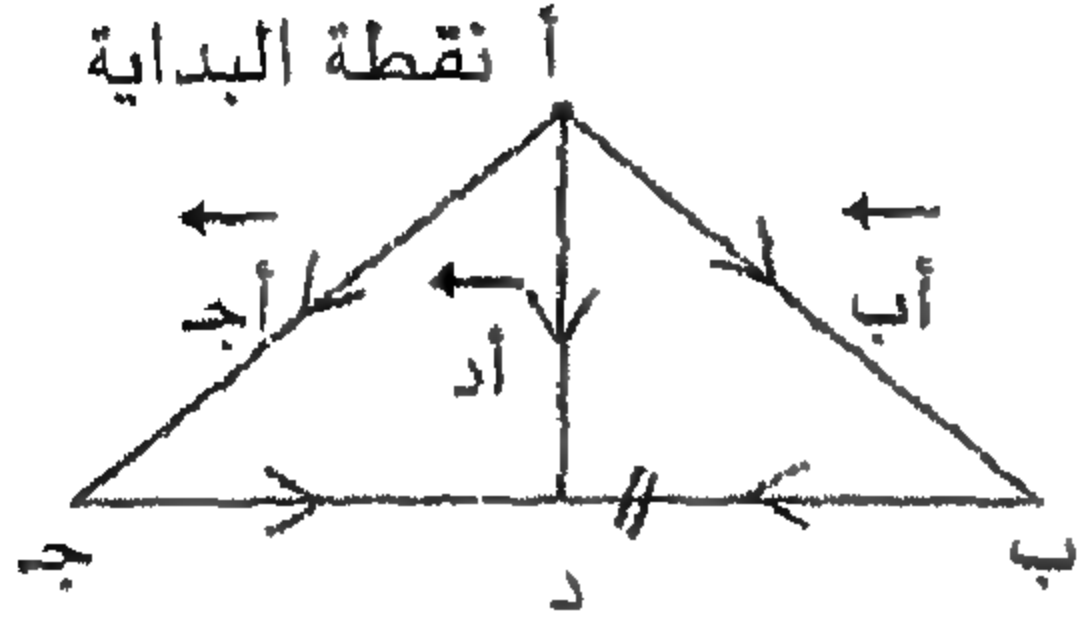
المتجهات



(١٦ - ٥) أمثلة محلولة على المتجهات

مثال ١: إذا كان \vec{AD} مستقيم متوسط في المثلث $\triangle ABC$ ،

أكتب \vec{AD} بدلالة \vec{AB} ، \vec{AC}



الحل:

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} \quad (\text{قاعدة المثلث})$$

$$\text{وكذلك} \quad \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD} \quad (\text{قاعدة المثلث})$$

$$\text{جمعاً} \quad \vec{AD} + \vec{AD} = (\vec{AB} + \vec{BD}) + (\vec{AC} + \vec{CD})$$

لكن $\vec{BD} = -\vec{CD}$ متجهان متساويان بالطول ومتعاكسان بالاتجاه

$$\therefore \vec{BD} = -\vec{CD} \quad \text{أو} \quad \vec{CD} = -\vec{BD}$$

$$\therefore \vec{AD} + \vec{AD} = (\vec{AB} - \vec{BD}) + \vec{AC} \quad (\text{كون} \quad \vec{BD} = -\vec{BD})$$

$$\vec{AD} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

مثال ٢: إذا كان $\vec{A} = \vec{O}_1 - \vec{O}_2 + \vec{O}_3$

$$\vec{B} = \vec{O}_1 + \vec{O}_2 + \vec{O}_5$$

$$\vec{C} = \vec{O}_3 - \vec{O}_1 + \vec{O}_4$$

فجد المتجه \vec{S} الذي يحقق المعادلة:

$$2\vec{A} + 3\vec{S} = \vec{C} - 2\vec{B} + 4\vec{S}$$

$$\text{الحل:} \quad 2\vec{A} + 3\vec{S} = \vec{C} - 2\vec{B} + 4\vec{S}$$

$$-3\vec{S} = \vec{C} - 2\vec{B} - 2\vec{A}$$

Diagram illustrating a 1D lattice with a defect. The lattice is represented by a horizontal line with circles (atoms) below it. One circle is missing, creating a gap. Below the lattice, arrows indicate the displacement of atoms. The equation $u + v - y = y$ is written below the arrows.

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{C} & \text{Y} & + & \text{D} & = & \text{C} & \text{Y} & + & \text{D} & = & \text{C} & \text{Y} & + & \text{D} & = & \text{C} & \text{Y} & + & \text{D} & = & \text{C} & \text{Y} & + & \text{D} \end{array}$$

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \text{س} = 2(و_3 - و_1) + 2(و_2 + و_5) - (و_3 - و_4) = \leftarrow$$

$$= 10^2 - 10^6 + 10^4 + 10^{10} - 10^3 + 10^4$$

$\therefore 3 \text{ و } 1 = \leftarrow \text{س}$

$$س^۲ + ص^۲ + ع^۲ - ۴س - ۶ص + ۸ع + ۲۹ = صفر$$

إكمال المربعات هكذا:

$$٢٩ - = (ع٨ + ٢ع) + (ص٦ - ٢ص) + (س٤ - ٢س)$$

تحصل علی:

$${}^2\text{ع} + {}^2\text{ص} + {}^2\text{س} + 29 = ({}^2\text{ع} + 8\text{ع} + {}^2\text{ع}) + ({}^2\text{ص} + 6\text{ص} - {}^2\text{ص}) + ({}^2\text{س} + 8\text{س} - {}^2\text{س})$$

$$17 + 9 + 4 + 29 = {}^2(4+ع) + {}^2(3-ص) + {}^2(2-س) \therefore$$

$$\therefore (س - ٢) + (ص - ٣) + (ع + ٤) = \text{صفر}$$

الكرة فإن $r^2 = \text{صفر}$ ← $r = \text{صفر}$ فالكرة التي نصف قطرها = صفر هي نقطة

وإحداثيات المركز (٢، ٣، - ٤) حيث إحداثيات النقطة.



المتجهات



فالمعادلة تمثل نقطة م (٢، ٣، -٤)

ومن هنا يمكن استنتاج أنه

عندما $r^2 < \text{صفر}$ ← المعادلة تمثل كرة نصف قطرها ر.

عندما $r^2 = \text{صفر}$ ← المعادلة تمثل نقطة.

عندما $r^2 > \text{صفر}$ ← المعادلة لا تمثل شكلاً هندسياً.

مثال ٤: إذا كانت أ (-١، ٣، ٦)، ب (٤، ٠، ٥) نقطتان في الفضاء

احسب طول القطعة المستقيمة أب.

$$|أب| = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2 + (ع_١ - ع_٢)^2}$$

$$= \sqrt{(-١ - ٤)^2 + (٣ - ٠)^2 + (٦ - ٥)^2}$$

$$= \sqrt{٢٥ + ٩ + ١} = \sqrt{٣٥} = ٥,٩ \text{ وحدة طول}$$

مثال ٥: أوجد المسافة بين النقطتين أ (٢جاس، جتاس، ظاس)

ب (جاس، ٢جتاس، صفر)

$$|أب| = \sqrt{(٢جاس - جاس)^2 + (جتاس - ٢جتاس)^2 + (ظاس - صفر)^2}$$

$$= \sqrt{جاس^2 + (-جتاس)^2 + ظاس^2}$$

$$= \sqrt{جاس^2 + جتاس^2 + ظاس^2}$$

$$= \sqrt{١ + ظاس^2}$$



المتجهات



لكن $1 + \text{ظا}^2 = \text{قا}^2$ (من المتطابقة المشهورة $\text{جا}^2 + \text{جتا}^2 = 1$ بعد

قسمة طرفيها على جتا^2)

$$\therefore | \overrightarrow{AB} | = | \overrightarrow{\text{قا}^2} | = \text{قاس}$$

\therefore المسافة بين النقطتين أ، ب هي قاس.

مثال ٦: أوجد معادلة الكرة التي مركزها م (٢، ١، -٧) ونصف

قطرها ٥ وحدات.

الحل:

الصورة القياسية للمعادلة هي: التي مركزها (أ، ب، ج) ونصف قطرها ر

$$(\text{س} - \text{أ})^2 + (\text{ص} - \text{ب})^2 + (\text{ع} + \text{ج})^2 = \text{ر}^2$$

$$\therefore (\text{س} - 2)^2 + (\text{ص} - 1)^2 + (\text{ع} + 7)^2 = 5^2$$

وبعد فك الأقواس وجعل الصورة القياسية بالصورة العامة هكذا:

$$\text{س}^2 - 4\text{س} + 4 + \text{ص}^2 - 2\text{ص} + 1 + \text{ع}^2 + 14\text{ع} + 49 = 25$$

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 - 4\text{س} - 2\text{ص} + 14\text{ع} + 54 = 25$$

$$\therefore \text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 - 4\text{س} - 2\text{ص} + 14\text{ع} + 54 - 25 = 0 \text{ صفر}$$

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 - 4\text{س} - 2\text{ص} + 14\text{ع} + 29 = 0 \text{ صفر معادلة الكرة.}$$

$$\text{مثال ٧: إذا كان } \overrightarrow{A} = (2, 3, 4), \overrightarrow{B} = (1, 2, 2)$$

$$\text{أوجد (١) } \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} \text{ (٢) } \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A}$$

الحل: إنه الضرب الداخلي أو النقطي



المتجهات



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$16 = 8 + 6 + 2 = (2 \times 4) + (2 \times 3) + (1 \times 2) =$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$$

$$16 = 8 + 6 + 2 = (4 \times 2) + (3 \times 2) + (2 \times 1) =$$

أي أن $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ فالضرب النقطي للمتجهات تبديلي

مثال ٨: ما قيمة جـ التي تجعل المتجهين $\vec{a} = 3\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

$$\vec{b} = 2\vec{u} - \vec{v} - 3\vec{w}$$

شرط التعامد هو أن يكون $\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{صفر}$

$$\text{أي أن } \vec{a} \cdot \vec{b} = (3 \times 2) + (-1 \times -3) + (-1 \times -4) = \text{صفر}$$

$$6 + 3 + 4 = \text{صفر}$$

$$10 - 3 =$$

$$ج = -\frac{3}{10}$$

مثال ٩: بين أن المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه النقط أ (١، ١)، ب (٢، ١)، جـ (٠، ٠) قائم الزاوية.

الحل: نجد أطوال أضلاعه



$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (1-1)^2 + (0-1)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$$

$$AM = \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2 + (0-1)^2}$$



المتجهات

$$\vec{a} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{b} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{c} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{18}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{18}$$

$$9 = 6 + 3 = 9 \text{ نعم}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ عكس نظرية فيثاغورس}$$

$$\therefore \text{المثلث أ ب ج قائم الزاوية في ج.}$$

$$\text{مثال ١٠: أوجد قياس الزاوية بين المتجهين } \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} \text{ و } \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$\text{الحل: جتا } \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$= \frac{(2 \times 1) + (-1 \times -1) + (0 \times 0)}{\sqrt{4+1} \times \sqrt{1+1}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}$$

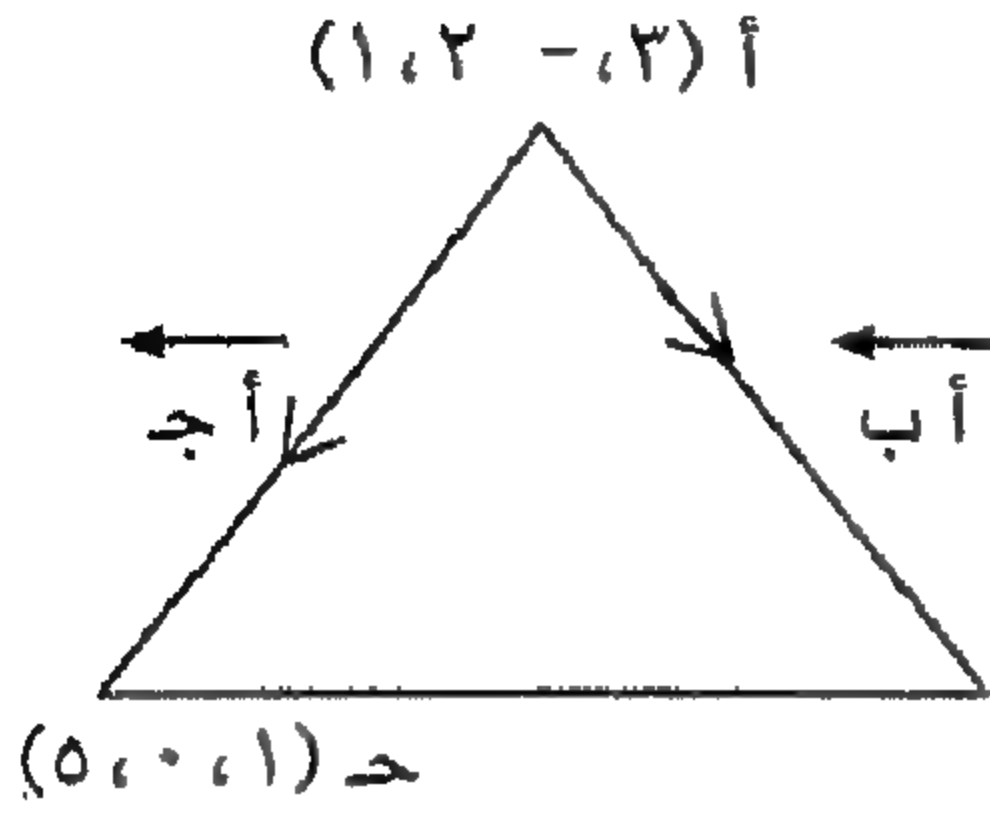
$$= \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right) \text{ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين.}$$

المتجهات



مثال ١١: احسب مساحة المثلث أ ب ج الذي رؤوسه:



أ (١، ٢ -، ٣)

ب (٤، ٣ -، ٧)

ج (٠، ١، ٥)

الحل:

بما أن مساحة المثلث = $\frac{1}{2} | \vec{AB} \times \vec{AC} |$ لذلك تكون من الضلعين المتجاورين أ ب، أ ج المتجهين أ ب، أ ج

$$\text{هكذا: } \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (4, 3, -7) - (1, 2, -3) = (3, 1, -4)$$

$$= (3, 1, -4) - (1, 2, -3) = (2, -1, -1)$$

$$\text{وكذلك } \vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (0, 1, 5) - (1, 2, -3) = (-1, -1, 8)$$

$$= (-1, -1, 8) - (1, 2, -3) = (-2, -3, 11)$$

$$\text{ومنها } \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 8 \\ -2 & -3 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= (11 - 4) - (-9 - 8) + (-12 - 2) = 7 + 17 - 14 = 10$$

$$\therefore \text{مساحة أ ب ج} = \frac{1}{2} | \vec{AB} \times \vec{AC} | = \frac{1}{2} \sqrt{10^2} = 5$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{10^2} = 5$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{10^2} = 5$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{10^2} = 5$$



المتجهات



$$\overline{10} \sqrt{3} = (\overline{10} \sqrt{3}) (6) \left(\frac{1}{2} \right) =$$

$$9,48 = (2,16) 3 =$$

مثال ١٢: إذا $\overrightarrow{A} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ، $\overrightarrow{B} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ عبر عن المتجه

($\overrightarrow{A} - 2\overrightarrow{B}$) بدلالة متجهي الوحدة \mathbf{i} ، \mathbf{j}

$$\text{الحل: } \overrightarrow{A} - 2\overrightarrow{B} = (5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - 2(4\mathbf{i} - 7\mathbf{j})$$

$$= 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 8\mathbf{i} + 14\mathbf{j}$$

$$= -3\mathbf{i} + 17\mathbf{j}$$

مثال ١٣: إذا كانت النقطة ج (٣، ٣، ٤) منتصف القطعة المستقيمة

أ ب في الفضاء حيث أ (٤، ٢، ٥) فما إحداثيات النقطة ب.

$$\begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ \text{ب (٤، ٢، ٥)} & \text{ج (٣، ٣، ٤)} & \text{ب (٣، ٣، ٤)} \end{array}$$

$$\text{بما أن إحداثيات ج هي ج } \left(\frac{x_B + 4}{2}, \frac{y_B + 2}{2}, \frac{z_B + 5}{2} \right)$$

وأيضاً إحداثياتها ج (٣، ٣، ٤) فإن

$$4 = \frac{x_B + 4}{2}, 3 = \frac{y_B + 2}{2}, 3 = \frac{z_B + 5}{2}$$

وبالضرب التبادلي لكل من المعادلات الثلاث السابقة:

$$8 = x_B + 4, 6 = y_B + 2, 6 = z_B + 5$$

$$\text{ومنها } x_B = 4, y_B = 4, z_B = 1$$

∴ إحداثيات ب (٤، ٤، ١)

مثال ١٤:

$$\text{إذا كان } \overrightarrow{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{B} = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{C} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

المتجهات



أوجد $\overrightarrow{أب}$. $\overrightarrow{بج}$

$$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{أ - ب} = \overrightarrow{(3 - 2)} + \overrightarrow{(4 - 1)}$$

$$= \overrightarrow{1} + \overrightarrow{3}$$

$$\overrightarrow{بج} = \overrightarrow{ج - ب} = \overrightarrow{(2 - 3)} + \overrightarrow{(1 - 2)}$$

$$= \overrightarrow{-1} + \overrightarrow{-1}$$

$$\therefore \overrightarrow{أب} . \overrightarrow{بج} = \overrightarrow{(1 - 2)} + \overrightarrow{(3 - 1)} = \overrightarrow{1} + \overrightarrow{2}$$

$$= 2 = 3 - 1 \text{ تعدد حقيقي}$$

مثال ١٥:

إذا كان $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{3} + \overrightarrow{4}$

$$\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{3} - \overrightarrow{4}$$

أوجد $|\overrightarrow{أ}|$ ، $|\overrightarrow{ب}|$ ، $|\overrightarrow{أب}|$

الحل:

$$|\overrightarrow{أ}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$|\overrightarrow{ب}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

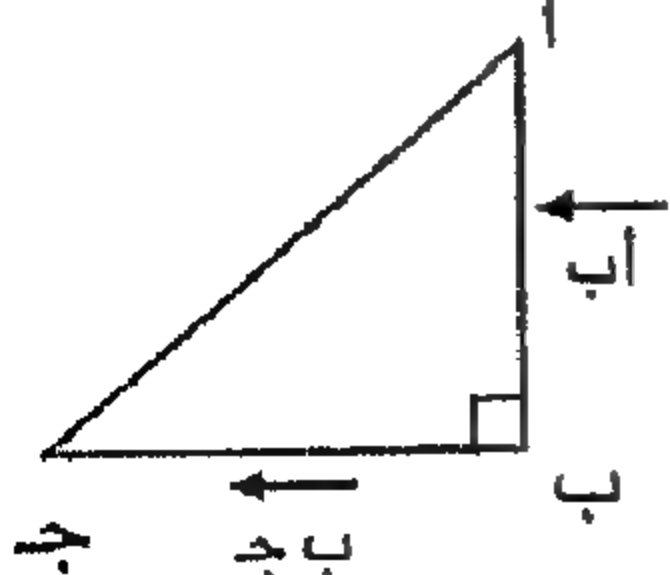
$$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{أ - ب} = \overrightarrow{(3 - 3)} + \overrightarrow{(4 - 4)} = \overrightarrow{0}$$

$$= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}$$

$$\therefore |\overrightarrow{أب}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

وكما نلاحظ أن الأطوال الناتجة أعداد حقيقية !!

مثال ١٦: ما قيمة k بحيث يكون المثلث $أ ب ج$ قائم الزاوية في $ب$



$$\text{حيث } \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{2} + \overrightarrow{1}$$



المتجهات



$$\vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \text{ و}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{c} \text{ و}$$

الحل:

حتى يكون \vec{a} ج قائم الزاوية في \vec{b} بحيث يكون $\vec{a} \perp \vec{b}$

وشرط التعامد هو $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$2 + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$2 - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\text{ومنها } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 2$$

$$\therefore 12 + \{ -3\vec{a} \cdot \vec{a} + 6 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} \} = 0$$

$$12 - 3(2) + 6 + 2(2) = 0$$

$$- (2 - 2 + 18 = 0)$$

$$\text{المميز: } \vec{b}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{c} = (1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7$$

$$73 = 72 + 1 =$$

$$\therefore \vec{c} = \frac{-\sqrt{73} \pm 1}{2} = \frac{-\sqrt{73} \pm \vec{b}}{2}$$

$$\therefore \vec{c} = \left(\frac{-\sqrt{73} + 1}{2} \text{ أو } \frac{-\sqrt{73} - 1}{2} \right)$$

مثال ١٧:

إذا كانت الزاوية بين المتجهين \vec{a} ، \vec{b} هي 60° وكان $|\vec{a}| = 2$ ،

$$|\vec{b}| = 5 \text{ أوجد } \vec{a} \cdot \vec{b}$$

المتجهات



الحل:

$$\text{وبالضرب التبادلي} \quad \frac{\begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{ب} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{أ} \end{array}}{\begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{ب} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{أ} \end{array}} = \text{بما أن جتاه}$$

$$\text{فإن} \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{أ} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{ب} \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{ب} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{أ} \end{array}$$

$$\text{أي أن} \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{أ} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{ب} \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{ب} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{أ} \end{array} \quad \text{جتا } 60^\circ$$

$$= (2)(5) \left(\frac{1}{2} \right) = 5 \text{ كعدد حقيقي}$$

مثال ١٨:

هل النقط الثلاثة م_١ (٤ ، ٣ ، ٠) ، م_٢ (١ ، ٢ ، -٢) ، م_٣ (٣ ، ٠ ، ١) تقع

على استقامة واحدة؟

الحل:

إذا كان طول م_١ م_٢ = مجموع طولي م_١ م_٣ + م_٢ م_٣ فالنقط الثلاثة مستقيمة

أي تقع على استقامة واحد.

نبدأ بإيجاد الأطوال:

$$\sqrt{25 + 9 + 9} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (3 - 0)^2 + (0 - 3)^2} = \text{م}_١ \text{م}_٢$$

$$6,057 = \sqrt{34} =$$

$$\sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{(4 + 2)^2 + (3 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \text{م}_٢ \text{م}_٣$$

$$2,449 = \sqrt{6} =$$

$$\sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (2 - 0)^2 + (1 - 3)^2} = \text{م}_١ \text{م}_٣$$

$$4,123 = \sqrt{17} =$$

$$\text{ولأن } 6,057 = 4,123 + 2,449 \text{ تقريباً}$$

فإن النقط الثلاث م_١ ، م_٢ ، م_٣ مستقيمة أي تقع على استقامة واحدة.



المتجهات



⇐ مثال ١٩: إذا كانت إحداثيات نقطة بداية المتجه \vec{A} $6 - 9$ و 3 هي

(-٢، ١) فما إحداثيات نقطة نهايته؟

الحل: نفرض أن $\vec{A} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ فتكون $(-٢، ١)$ نقطة البداية،

(x_1, y_1) نقطة النهاية.

$$\text{وبما أن } \vec{A} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_9 \\ y_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ y_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{13} \\ y_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{14} \\ y_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{15} \\ y_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{16} \\ y_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{17} \\ y_{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{18} \\ y_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{19} \\ y_{19} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{وكذلك } \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\therefore $(4, 10)$ هي نقطة النهاية.

⇐ مثال ٢٠: إذا كان $\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

أوجد الأعداد l, m, n حيث $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ومنه } \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

المتجهات



$$+ (3 - m) = 0 \quad + 0 = 0$$

أي أن: التساوي بمعادلات و ، و ، و (تناظرها)

$$(1) \quad 4 + m - 6 = 0 \quad \text{صفر}$$

$$(2) \quad 1 = 0 \quad 3 + m^2 + 6 -$$

$$(3) \quad 1 = 3 - m$$

وبحل المعادلات بطريقة الحذف أو المحددات (كريمير أو الصف البسيط)

والأفضل هو الحذف.

لحذف

$$(1) \quad 4 + m - 6 = 0 \quad \text{صفر}$$

$$(2) \quad 2(1 = 0 \quad 3 + m^2 + 6 -)$$

$$(1) \quad 4 + m - 6 = 0 \quad \text{صفر}$$

$$(2) \quad 2 = 0 \quad 6 + m^4 + 12 -$$

$$(4) \quad 2 = 5 + 8 -$$

جمعاً

وبحل المعادلتين

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 1 = 3 - m \\ 2 = 5 + 8 - \end{pmatrix}$$

بالحذف

$$5 = 5 - 15$$

جمعاً

$$2 = 5 + 8 -$$

$$\boxed{1 = 7}$$

$$\leftarrow 7 = 7$$





$$\text{لكن } 3 - م = 1 \quad (2)$$

$$\therefore 3 - (1) = م = 1$$

$$م = 1 + 3 = 4$$

$$\boxed{م = 4}$$

$$\text{لكن } 4 + م - 6 = 0 \text{ صفر}$$

$$\therefore 4 + (1) - 6 = 0 \text{ صفر}$$

$$4 - 6 + م = 0 \text{ صفر}$$

$$م = 6 - 4 = 2$$

$$\boxed{م = 2}$$

$$\therefore ل = 1$$

$$م = 2$$

$$ل = 1$$

(١٦ - ٦) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) احسب المسافة بين النقطتين أ (١ ، ٢ ، ٣) ، ب (٣ ، ٢ ، ١) في الفضاء.

{ ٢ ، ٢ }

(٢) بين أن المتجهين $\vec{a} = 3\vec{u} - 7\vec{v} + 2\vec{w}$

$\vec{b} = 10\vec{u} + 4\vec{v} - \vec{w}$ متعامدان

{إرشاد شرط التعامد: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ } $\vec{b} = 0$ = صفر

(٣) إذا كان $\vec{a} = 5\vec{u} + \vec{v}$

$\vec{b} = 4\vec{u} - 7\vec{v}$

أوجد $3\vec{a} - 2\vec{b}$

{ $7\vec{u} + 17\vec{v}$ }

(٤) احسب $\vec{a} \times \vec{b}$ إذا كان

$\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$

$\vec{b} = \vec{u} - 2\vec{v} + 2\vec{w}$

{ $-3\vec{u} - 5\vec{v} - 6\vec{w}$ }

(٥) إذا كان $\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$

$\vec{b} = 3\vec{u} - 5\vec{v}$

أوجد $\vec{a} + \vec{b}$ ، $\vec{a} - \vec{b}$ ، $4\vec{a}$ ، $-5\vec{b}$

المتجهات



(٦) أوجد مركز الكرة التي معادلتها:

$$س^2 + ص^2 + ع^2 - ٦س + ٨ص + ٤ع + ٤ = \text{صفر ونصف قطرها أيضاً.}$$

$$\{ م(٢, -٤, -٢), \text{نق} = ٥ \}$$

إرشاد: إكمال المربعات

(٧) تكتب معادلة الكرة التي قطرها أ ب حيث أ (١، ٤، ٢)، ب (-٧، ٢، ٢)

$$\{ س^2 + ص^2 + ع^2 + ٦س - ٢ص - ١٩ = \text{صفر} \}$$

(٧) احسب إحداثيات نقطة منتصف القطعة أ ب حيث أ (٠، ٢، ٥)، ب (٤، ١، ٠)

$$\{ ج(٢, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}) \}$$

(٩) اكتب معادلة الكرة التي مركزها م (٢، ٤، -٤) وتمر بنقطة الأصل.

$$\{ س^2 + ص^2 + ع^2 - ٤س - ٨ص + ٨ع = \text{صفر} \}$$

إرشاد: أوجد نصف قطرها أولاً.

$$(١٠) \text{ إذا كان } \vec{a} = \vec{w}_1 - \vec{w}_2 + \vec{w}_3$$

$$\vec{b} = -\vec{w}_1 + \vec{w}_4$$

$$\text{احسب: «١» } | \vec{a} |, \text{ «٢» } | \vec{b} |, \text{ «٣» } | \vec{a} - \vec{b} |$$

$$\text{«٤» } | \vec{a} + \vec{b} |, \text{ «٥» } | \vec{a} - \vec{b} |$$

$$\{ \sqrt{٤٣}, \sqrt{١٩}, \sqrt{١٤}, \sqrt{١٧}, \sqrt{١٤} \}$$

المتجهات



(١١) أوجد الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A} = \vec{u}_3 - \vec{u}_1 - \vec{u}_2$

$$\vec{B} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

$$\left\{ \frac{\pi}{3} \right\}$$

(١٢) إذا كان $\vec{A} = \vec{u}_3 - \vec{u}_1 - \vec{u}_2$

$$\vec{B} = \vec{u}_2 - \vec{u}_3 + \frac{1}{2}\vec{u}_1$$

ما قيمة $\vec{A} \cdot \vec{B}$

{ ٨ } كعدد حقيقي

(١٣) أي من أزواج المتجهات التالية متعامدة.

$$1) (\vec{A}, \vec{B}) \text{ حيث } \vec{A} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{B} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

{ متعامدان }

$$2) (\vec{A}, \vec{B}) \text{ حيث } \vec{A} = \sqrt{2}\vec{u}_1 + \vec{u}_3 + \vec{u}_2, \vec{B} =$$

{ لا }

$$\vec{B} = -\vec{u}_1 + \sqrt{2}\vec{u}_2 + \vec{u}_5$$

إرشاد شرط التعامد $\vec{A} \cdot \vec{B} = \text{صفر}$

(١٤) إذا كان $\vec{A} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1 - \vec{u}_3$

$$\vec{B} = -\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_4$$

أوجد (١) $\vec{A} \times \vec{B}$ (٢) $\vec{B} \times \vec{A}$ (٣) ماذا تستنتج؟

$$\{\vec{u}_2 - \vec{u}_1 - \vec{u}_3, -\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_4, -\vec{u}_1 + \sqrt{2}\vec{u}_2 + \vec{u}_5\} \text{ الاستنتاج } \vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$$



المتجهات



(١٥) أوجد مركز ونصف قطر الكرة التي معادلتها

$$س^2 + ص^2 + ع^2 - ٢س + ٤ص + ٦ع = \text{صفر}$$

{م (١، ٢، - ٣)، نق = $\sqrt{١٤}$ ، إكمال المربعات}

(١٦) إذا كان $\vec{A} = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$

$$\vec{B} = \vec{u}_1 + ٢\vec{u}_2$$

أوجد الزاوية المحصورة بين المتجهين \vec{A} ، \vec{B}

$$\left\{ \frac{\pi}{٤} \right\}$$

(١٧) احسب المسافة بين النقطة ك (٢، ٦، - ٤) ومنتصف القطعة المستقيمة

الواصلة بين النقطتين ل (- ١، ٢، ٨)، م (٥، - ٤، ٦).

(١٨) ما طول نصف قطر الكرة التي معادلتها

$$س^2 + ص^2 + ع^2 + ٢س + ٨ص - ٤ع + ٥ = \text{صفر}$$

(١٩) ما قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{A} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ ، $\vec{B} = \vec{u}_1 + ٢\vec{u}_2 - \vec{u}_3$

(٢٠) اكتب معادلة الكرة إذا كانت النقطتان (٥، ٦، - ١) ، (- ٧، ٤، ٣)

طريقه قطر فيها.

(٢١) إذا كان $\vec{A} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ ، $\vec{B} = \vec{u}_1 + ٢\vec{u}_2 - \vec{u}_3$ احسب $|\vec{A} \cdot \vec{B}|$

{٥ $\sqrt{٤}$ وحدة طول}





$$(22) \text{ إذا كان } \vec{a} = 3\vec{u} + \vec{v}, \vec{b} = \vec{u} - \vec{v} \text{ حيث } \vec{u}, \vec{v} \text{ متجهان } \vec{u} \neq \vec{v}$$

$$\text{ما قيمة ج عندما } |\vec{a}| = |\vec{b}| \quad \{3 \pm\}$$

$$(23) \text{ إذا كان } \vec{a} = \vec{u} + (\vec{u} - \vec{v}) + (\vec{u} + \vec{v}), \text{ حيث } \vec{u}, \vec{v} \text{ متجهان } \vec{u} \neq \vec{v} \text{ ما قيمة ج}$$

$$\text{عندما } |\vec{a}| = 2 \quad \left\{ \frac{\sqrt{6}}{2} \pm \right\}$$

$$(24) \text{ إذا كان } \vec{a} = \vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}, \vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} \text{ أوجد } \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\{-\vec{u} + 7\vec{v} + 5\vec{w}\}$$

$$(25) \text{ هل النقط التالية } (1, 1, 2), (1, 3, 6), (1, 2, 4) \text{ الواقعة في}$$

الفضاء تقع على استقامة واحدة ؟ وضح إجابتك.

$$(26) \text{ إذا كان } \vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}, \vec{b} = \vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w}$$

$$\text{أوجد } \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$$

$$(27) \text{ إذا كان } \vec{a} = 4\vec{u} - 6\vec{v} + 3\vec{w}, \vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}, \vec{c} = 6\vec{u} + 3\vec{v} - 3\vec{w}$$

ما قيمة الأعداد الحقيقية ل، م، ن علماً أن

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$(28) \text{ إذا كان } \vec{a} = 3\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}, \vec{b} = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$$

$$\text{أوجد } \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{a}, \vec{b} \cdot \vec{b}, \vec{a} \times \vec{a}, \vec{b} \times \vec{b}$$

$$(29) \text{ ما قيمة ج التي تجعل المتجهين } \vec{a} = 2\vec{u} + \vec{v} + 4\vec{w}$$

المتجهات



$$\vec{b} = 2\vec{a} + 3\vec{c} - 7\vec{d} \quad \text{متعامدين}$$

إرشاد: شرط التعامد $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ = صفر

(٣٠) أ ب ج مثلث زواياه أ ، ب ، ج وأضلاعه أ ، ب ، ج بين باستخدام قاعدة

$$\text{حساب مساحة المثلث م} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \quad \text{حيث } |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$$

$$\text{أن : } \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{c}|} = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{a}|}$$

(٣١) ما طول نصف قطر الكرة التي معادلتها $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ = صفر

(٣٢) إذا كانت النقط ك (١ ، ١ ، ١) ، ل (- ١ ، ٢ ، ٠) ، م (٢ ، ٠ ، - ١) ثلاث

نقط في الفضاء تمثل رؤوس المثلث ك ل م ، احسب أطوال أضلاعه ومساحته.

(٣٣) اكتب معادلة الكرة التي مركزها (٢ ، ٣ ، - ١) وتمر بالنقطة (١ ، ٧ ، - ٩).

(٣٤) احسب البعد بين النقطتين أ (٨ ، ٣ ، - ٨) ، ب (٦ ، - ١ ، ٩) {٣}

(٣٥) في المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ (١ ، ٢ ، - ٣) ، ب (٠ ، ١ ، ٢) ، ج (٢ ، ١ ، ١)

أوجد طولي الضلعين أ ب ، أ ج .

$$\{ \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3} \}$$

(٣٦) احسب قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} , \quad \vec{b} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \quad \{37^\circ \text{ تقريباً}\}$$

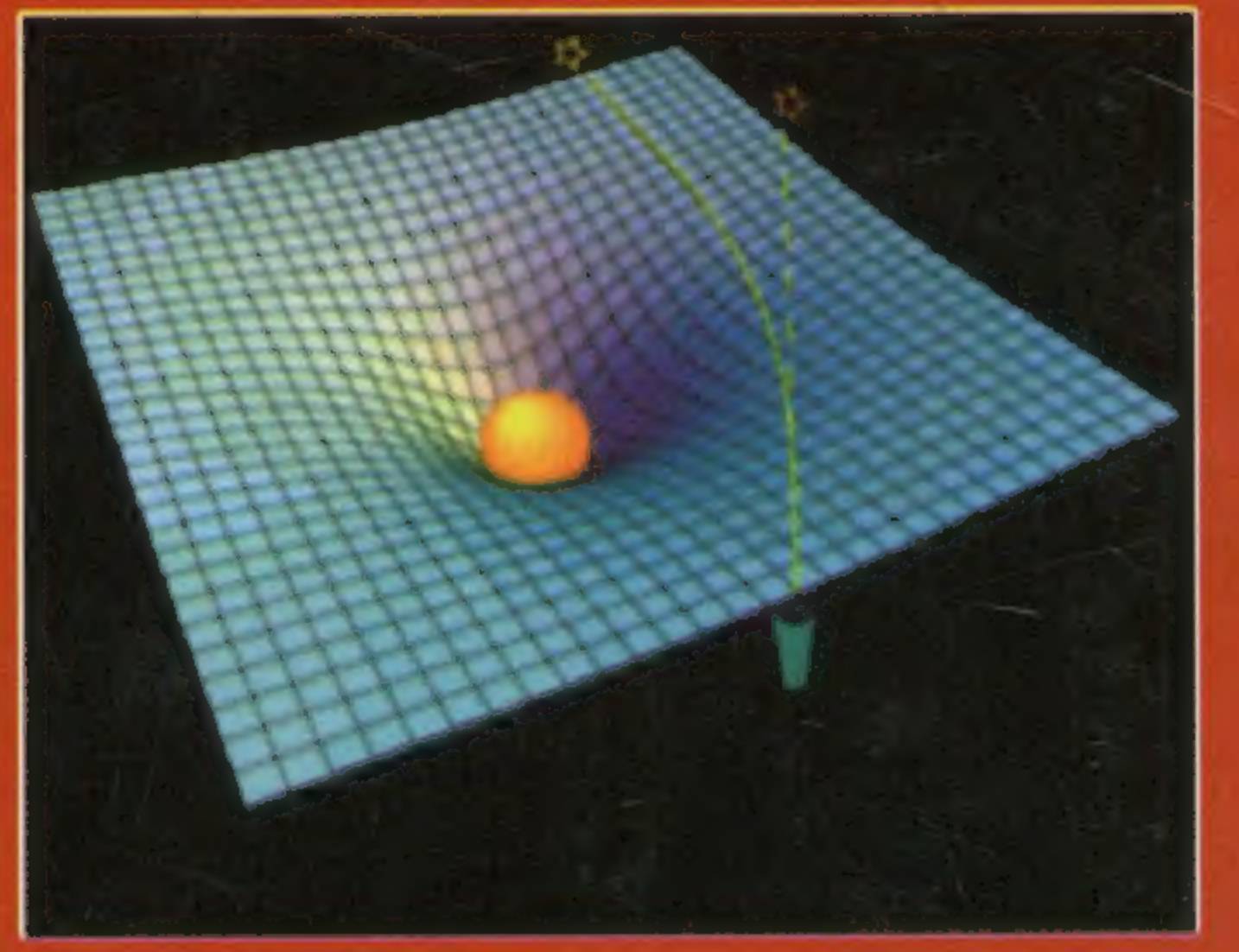
(٣٧) احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه أ (٢ ، ٤ ، - ١) ، ب (٢ ، ٠ ، ٤) ، ج (- ٣ ، ٥ ، ٤)

$$\{ 21.7 \text{ وحدة مساحة} \}$$

(٣٨) أوجد نصف قطر الكرة $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ = صفر



- (١) أ . ج مادوكس "مبادئ التحليل الرياضي" ترجمة وليد ديب، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني ١٩٨٤ م.
- (٢) ايرل و . سوكوفسكي "حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية" جزءان ، ترجمة أحمد سعيدان ورفاقه، ١٩٨١ م.
- (٣) سعد حسنين محمد ورفاقه، "المدخل في الرياضيات الحديثة" ، جزءان، دار المعارف بمصر ، ١٩٧١ م.
- (٤) سليمان أبو صبحا "الرياضيات للعلوم الاقتصادية والإدارية" مكتبة بغداد - عمان ، ١٩٩٤ م.
- (٥) شارلز سولومون، "الرياضيات" ترجمة علي بن الأشهر، معهد الاتحاد العربي، بيروت - ١٩٨١ م.
- (٦) عادل سودان ورفاقه "الرياضيات المعاصرة" جزءان، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٩٧١ م.
- (٧) عايش زيتون "أساسيات الإحصاء الوصفي" ، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان، ١٩٨٤ م.
- (٨) عبدالرحيم القواسمة وزميله، "دليل الاختبارات في الرياضيات المعاصرة" جزءان، دار الفرقان للنشر والتوزيع - عمان ، ١٩٨٢ م.
- (٩) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الإحصاء" ، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.
- (١٠) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الرياضيات" ، دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.
- (١١) عبدالعزيز هيكل "الرياضة المالية" دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٧٨ م.
- (١٢) علي عبدالله الدفاع "نوابغ علماء العرب في الرياضيات" دار الاعتصام.
- (١٣) فيجودسكي، "المرجع في الرياضيات العالية" ترجمة أنطون منصور، دار جبر للطباعة والنشر، روسيا - موسكو، ١٩٧٥ م.
- (١٤) كما يعقوب "الرياضيات الحديثة" جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧٣ م.
- (١٥) محمد عادل سودان، "الرياضيات العامة" ، ثلاثة أجزاء، دار العلوم للطباعة والنشر.
- (١٦) محمد عاطف خير الدين ورفاقه، "المثالي في الرياضيات المعاصرة" عدة أجزاء.
- (١٧) نيل ديفدسون ورفيقه "الجبر المجرد" ترجمة ديب حسين، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، ١٩٨٢ م.
- (١٨) نخبة من المؤلفين "الرياضيات المدرسية وفق منهاج التربية والتعليم الأردنية"، ٢٠٠٧ م.
- (١٩) وليم جويس ورفيقه "مبادئ المعادلات التفاضلية"، ترجمة أحمد علاونه ورفيقه، مركز الكتب الأردني، ١٩٩٠ م.



الرياضيات الشاملة
الهندسة الفضائية
المتتاليات والمتسلسلات
المنحنيات

Bibliotheca Alexandrina



1213162



للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

هاتف: 00962 6 5658252 / 00962 6 5658253

فاكس: 00962 6 5658254 ص.ب: 141781

البريد الإلكتروني: darosama@orange.jo

الموقع الإلكتروني: www.darosama.net